

# Modélisation géométrique

## Courbures discrètes

Alexandra Bac

Université Aix-Marseille

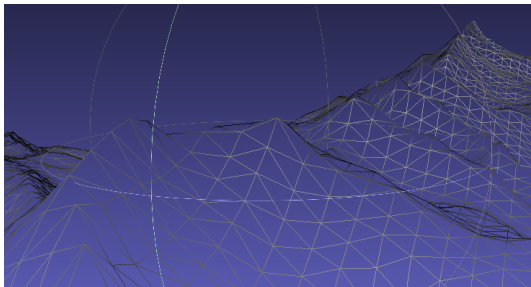
October 11, 2018

# Plan

- 1 Discrétisation des courbures sur un maillage
  - Première approximation des courbures
  - Borelli, Boix : triangles géodésiques
  - Meyer, Desbrun et al. : aires de Voronoï
  - Taubin : approximer le tenseur de courbures
  - Approche via une surface continue
- 2 Courbures d'un nuage de points
- 3 Autres approches

## Qu'est-ce que ça veut dire ?

Sur un maillage, il n'y a que de la continuité, rien n'est dérivable ...



### Normales, courbures :

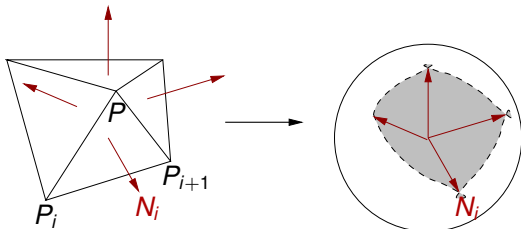
- On suppose que le maillage approxime une surface lisse
- Courbures du maillage  $\equiv$  celle de la surface lisse

## Courbure Gaussienne

On est tentés d'utiliser le *theorema Egregium* de Gauss :

$$K_p = \lim_{U \rightarrow P} \frac{\text{Aire}(N(U))}{\text{Aire}(U)}$$

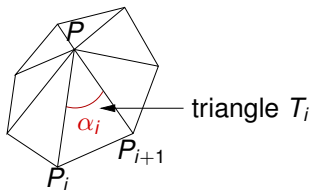
en prenant pour voisinage  $U$  le cercle des premiers voisins (ou une partie)



## Courbure Gaussienne

Cette aire sur la sphère de Gauss se calcule comme :

$$2\pi - \sum \alpha_j \text{ (Défaut angulaire)}$$

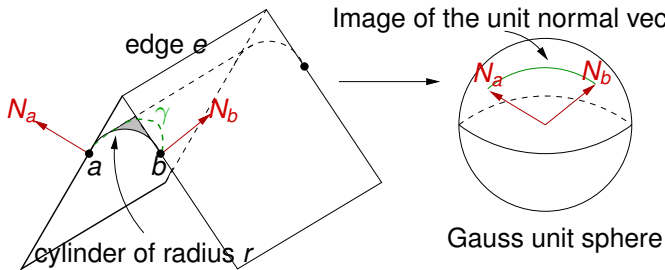


Q'ou l'approximation de la courbure Gaussienne au sommet  $P$  :

$$K_p = \frac{2\pi - \sum \alpha_j}{\sum \text{Aire}(T_i)}$$

## Courbure moyenne

L'idée est d'approcher chaque arête par un cylindre de rayon  $r$  :



On voit que :

- 1 en chaque point du cylindre,  $H_p = \frac{1}{r}$
- 2 d'où  $\int_a^b H(x) dx = \frac{1}{2}\alpha$  (où  $\alpha$  est l'angle diédral entre les deux faces)

## Courbure moyenne

D'où l'approximation de la courbure moyenne le long de l'arête  $e$  :

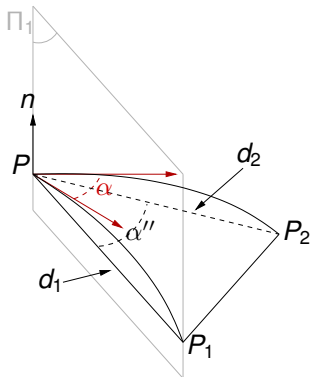
$$H(e) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \text{long}(e)$$

Ces formules ne sont que des approximations et bien entendu :  
elles ne convergent pas !

## Pourquoi les triangles géodésiques ?

Pour obtenir une meilleure approximation du *theorema Egregium* ...

On montre que :

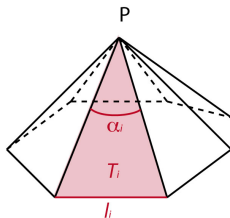


$$\alpha - \alpha'' = \frac{d_1 d_2 k_1 k_2}{4 \sin \alpha''} - \frac{d_1^2 k_1^2 - d_2^2 k_2^2}{8 \tan \alpha''} + \mathcal{O}(d^3)$$



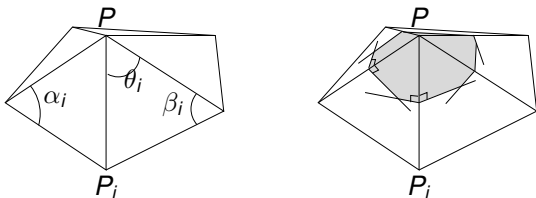
# Approximation de la courbure gaussienne

$$K_p = \frac{2\pi - \sum \alpha_j}{\frac{1}{2} \sum \text{Aire}(T_j) - \frac{1}{8} \sum \cotan(\alpha_j) l_j^2}$$



## Courbure gaussienne

Meyer, Desbrun et al. se basent sur les cellules de Voronoï.



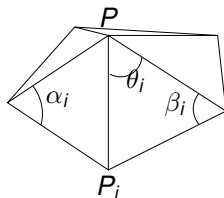
Mais :

- pour des **angles obtus**, pas de cellules de Voronoï
- $Aire_{mixte}$  :
  - cellules de Voronoï quand c'est possible
  - barycentres sinon

## Courbure moyenne

$$H_P \cdot N_P = \frac{1}{2 \text{Aire}_{\text{mixte}}} \sum_i (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (P - P_i)$$

Donc cette formule fournit aussi une approximation de  $N_P$ .



## Courbure Gaussienne

Et la courbure Gaussienne est donnée par :

$$K(P) = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{Aire_{mixte}}$$

## Courbures principales et tenseur de courbure

Etant donné que :

$$K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad H_p = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Il est bien connu que  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les deux racines du polynôme :

$$X^2 - 2 \cdot H_p X + K_p$$

La détermination des directions principales est plus délicate.

# Convergence

Ces sont des approximations. La convergence n'est **pas garantie** :

- dépend de la triangulation
  - plus elle est régulière, meilleure est la convergence
  - idéal : régulière, valence 6
  - sur une triangulation irrégulière, non garantie
- au mieux, convergence en norme  $\mathcal{L} - 1$  pour une triangulation quelconque

## Approximation du tenseur de courbures

Rappelons la formule d'Euler : soit  $\vec{t}_\theta = \cos(\theta)d_1 + \sin(\theta)d_2 \in T_P$

$$\kappa_{\vec{t}_\theta} = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$$

On définit alors :

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa_{\vec{t}_\theta} \vec{t}_\theta \vec{t}_\theta^t d\theta$$

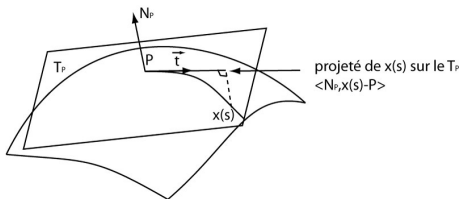
Les trois vecteurs propres de cette matrice sont :

- La normale  $N_P$
- Les deux directions principales  $d_1$  et  $d_2$ .

## Approximation de $\kappa_{\vec{t}}$

Si  $\vec{t} \in T_P$ , et que  $x$  est une courbe issue de  $P$  et de tangente  $\vec{t}$  en  $P$  on montre que :

$$\kappa_{\vec{t}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2N^t(x(s) - P)}{\|x(s) - P\|^2}$$





## Approximation de $M$

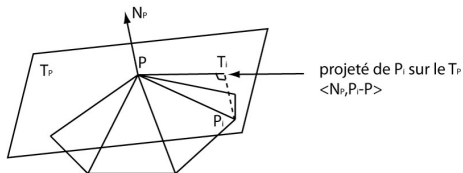
Pour chaque voisin  $P_i$  de  $P$ , on approxime :

- le vecteur tangent, projeté de  $PP_i$  sur  $T_P$  par :

$$T_i = \frac{(I - N_P N_P^t)(P_i - P)}{\|(I - N_P N_P^t)(P_i - P)\|}$$

- la courbure dans la direction  $T_i$  par :

$$\kappa_j = \frac{2N_P^t(P_i - P)}{\|P_i - P\|^2}$$



## Approximation de $M$

Puis :

$$M = \sum_i \omega_i \kappa_i T_i T_i^t$$

où  $\omega_i$  est proportionnel à l'aire des triangles contenant l'arête  $PP_i$ .

**Vecteurs/valeurs propres** de cette matrice :

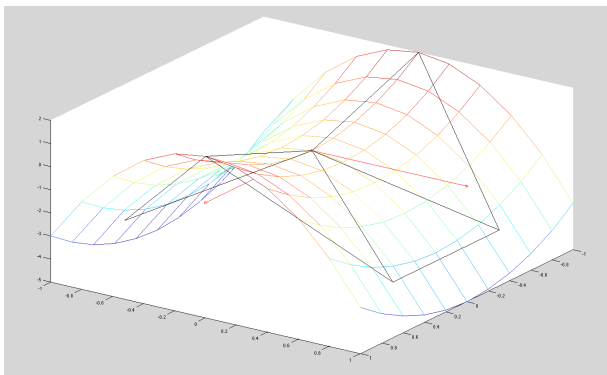
- La normale  $N_P$  (pour  $\lambda = 0$ )
- Les deux directions principales (pour  $\lambda = \kappa_1$  et  $\kappa_2$ )

## Approche via une surface continue

On va utiliser les courbures d'une surface continue approximant localement le maillage.

- Soit  $P$  un sommet et  $\{P_i\}_{i \in I}$  ses voisins
- Approximation aux moindres carrés :
  - surface paramétrique quadratique ou cubique
  - ou surface implicite
- Les courbures courbures du maillage en  $P$  sont définies comme celles de la surface lisse

## Approche via une surface continue

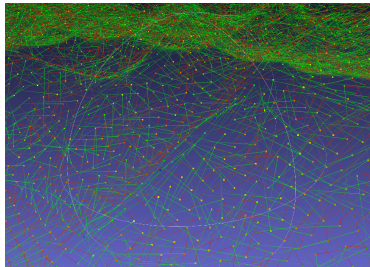
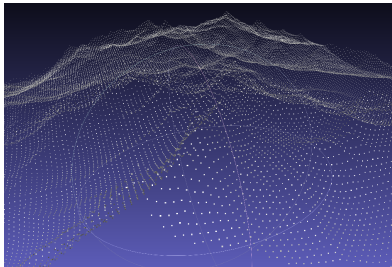


# Plan

- 1 Discrétisation des courbures sur un maillage
  - Première approximation des courbures
  - Borelli, Boix : triangles géodésiques
  - Meyer, Desbrun et al. : aires de Voronoï
  - Taubin : approximer le tenseur de courbures
  - Approche via une surface continue
- 2 **Courbures d'un nuage de points**
- 3 Autres approches

## Qu'est-ce que ça veut dire ?

- Nuage de points échantillonné sur une surface
- Peut-on s'approcher des courbures de la surface ?

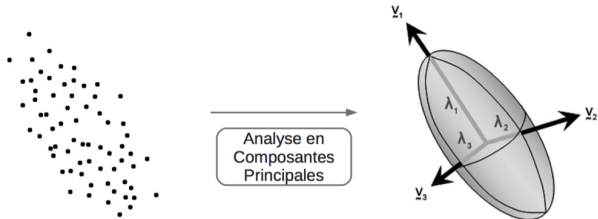


## Revenons à la définition continue

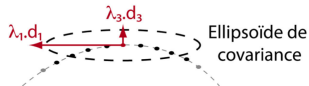
- Courbure dans la direction  $\vec{t} \in T_P$  : variation de la normale
- Courbures principales : plus fortes variations des normales
- Donc :
  - $N_P$  : direction d'étalement minimum du nuage de points au voisinage de  $P$
  - Les deux directions principales lui sont orthogonales

→ Analyse en Composantes principales (ACP)

# Analyse en composantes principales



$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$





# Algorithme

Etant donné un point  $P_0$

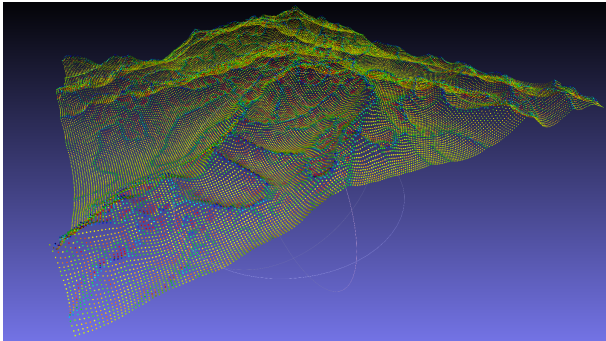
- Calculer  $\{P_i\}_{i \in \{1 \dots n\}}$  les voisins de  $P_0$  ( $k$ -voisins ou  $\varepsilon$ -voisins)
- Analyse ACP de ce nuage :
  - Soit :

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (P_i - \bar{P})(P_i - \bar{P})^t$$

où  $\bar{P}$  est le barycentre des  $P_i$ .

- $Z$  admet 3 valeurs propres :  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  et leurs directions propres associées  $d_1, d_2, d_3$ , à l'ordre 1 :
  - $d_3$  est une approximation de  $N_P$
  - $d_1$  et  $d_2$  sont des approximations des directions principales et  $\lambda_1$  est liée à  $\kappa_1^2$  ( $\lambda_2$  liée à  $\kappa_2^2$ ).

# Approche par ACP



# Plan

- 1 Discrétisation des courbures sur un maillage
  - Première approximation des courbures
  - Borelli, Boix : triangles géodésiques
  - Meyer, Desbrun et al. : aires de Voronoï
  - Taubin : approximer le tenseur de courbures
  - Approche via une surface continue
- 2 Courbures d'un nuage de points
- 3 Autres approches

## Approches via surfaces continues

Les autres approches sont basées sur l'**approximation locale par des surfaces continues** :

- Approximation locale par des sphères algébriques (APSS - voir Meshlab)
- Approximation par des surfaces MLS (nécessite une estimation de la normale)
- ...