Examen d'algèbre
Polytech Marseille - Informatique 3

Alexandra Bac

24 janvier 2017

Epreuve de 2h. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (Relations d'ordre).
On considère la relation binaire d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ (où $E = \{a, b, c\}$), c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A\mathcal{R}B \ \Leftrightarrow A \subseteq B$$

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{A} = \{\{a\}; \{b\}; \{a; c\}\} \qquad \mathcal{B} = \{\{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$$

1. Dessiner le diagramme de Hasse de cette relation sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement (on rappelle qu'il s'agit de “dessiner” la relation avec des flêches).
2. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont-ils des plus grands et plus petits éléments ?
3. Déterminer les majorants et les minorants de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}(E)$ (on rappelle que $E = \{a; b; c\}$, on peut donc déterminer explicitement l'ensemble des majorants et minorants).
4. En déduire les bornes inf et sup de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (Relations d'équivalence, ensembles).
On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad ay = bx$$

1. Rappelez la définition d'une relation d'équivalence (juste la définition ...). On admettra que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculez : $\overset{\bullet}{(1, 1)}$, $\overset{\bullet}{(1, 2)}$ et les dessiner.
3. D'une manière générale, étant donné un élément (a, b), déterminez $\overset{\bullet}{(a, b)}$ et en déduire quelles sont les classes d'équivalence.

Exercice 3 (Groupes finis - et un peu d'espace vectoriels).
Dans cet exercice on va s'intéresser aux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ c'est-à-dire les matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ inversibles, on note traditionnellement $\mathcal{G}l_n(\mathbb{F}_2)$.

1. Expliquer brièvement pourquoi c'est un groupe pour la multiplication.
2. On veut montrer que son ordre est $(2^n - 1)(2^n - 2) \cdots (2^n - 2^{n-1})$
   (a) Expliquer pourquoi, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ sssi ses vecteurs colonne sont libres (indication : si on note f l'application linéaire associée, faire le lien entre 1) les vecteurs colonnes libres, 2) l'image de f est de dimension n, 3) f est bijective, 4) A inversible).
   Il faut donc construire des vecteurs indépendants ...
   (b) (**bonus** : +2)
      i. Si on a k vecteurs indépendants $\{u_1, \ldots, u_k\}$, expliquer pourquoi $\mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_k\})$ contient 2^k éléments (attention, rappelez-vous que les coefficients sont pris dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$!)

ii. En dénombrant colonne par colonne le nombre de choix que l'on a pour chaque nouveau vecteur, en déduire que $\mathrm{Ord}(\mathcal{G}l_n(\mathbb{F}_2)) = (2^n - 1)(2^n - 2)\cdots(2^n - 2^{n-1})$.

3. On va maintenant se restreindre au cas de $\mathcal{G}l_2(\mathbb{F}_2)$ (donc les matrices 2×2 inversibles à coefficients binaires).

   (a) D'après ce qui précède, quel est l'ordre de $\mathcal{G}l_2(\mathbb{F}_2)$?

   (b) Quels peuvent être les ordre possibles pour les éléments de $\mathcal{G}l_2(\mathbb{F}_2)$?

   (c) Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \dot{1} & \dot{1} \\ \dot{1} & \dot{0} \end{pmatrix}$$

   i. Montrer que $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{F}_2)$.

   ii. Quel est son ordre ?

Exercice 4. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le spectre de A est $\{-3, 0\}$ et déterminer les multiplicités.
2. Diagonaliser A ... si possible. Donner (mais ne faites pas les calculs !) la formule de changement de base correspondante (en expliquant).
3. Sans calcul, en déduire $\ker(f)$ et sa dimension, puis la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Enfin, en déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. En déduire l'interprétation géométrique de f.