Ex. 5

1) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$f(e_1) = (1,1,2)$$
$$f(e_2) = (2,1,3)$$
$$f(e_3) = (1,0,-2)$$

Pour déterminer analytiquement f, le plus simple consiste à calculer sa matrice dans la base canonique, puis à calculer $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \nwarrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

Donc l'expression analytique de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ x+y \\ 2x+3y-2z \end{pmatrix} = f(x,y,z)$$

Noyau de f

On peut le calculer
- soit avec l'expression analytique ie $f(x,y,z) = \vec{0}$
- soit via la matrice ie $A \times X = 0$

On utilise l'approche matricielle :

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— pivot} \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— pivot} \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ — dimension 0

$\Longrightarrow f$ injective

Puis, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}_{0} + \dim(\operatorname{Im} f)$$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3$ or $\operatorname{Im} f$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow \underline{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$

ii) On considère les vecteurs $e'_1 = (1,1,0)$, $e'_2 = (0,1,-1)$, $e'_3 = (0,0,1)$. Montrons qu'ils constituent une base.

soit on prouve qu'ils sont libres

soit du rang 3

ici ... $\rightsquigarrow$ sont libres

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On suppose :

$\lambda_1 . e'_1 + \lambda_2 . e'_2 + \lambda_3 . e'_3 = \vec{0}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$ (car ce sont 3 vects. libres d'un espace de dimension 3).

Soit g définie par

$$\begin{cases} g(e'_1) = e'_1 + e'_2 \\ g(e'_2) = 2e'_3 \\ g(e'_3) = e'_2 - e'_1 \end{cases}$$

On veut déterminer l'expression analytique de g. ie. connaître sa matrice dans la base canonique.

$\hookrightarrow$ ces égalités fournissent la matrice de g

dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\} = \mathcal{B}'$

→ changement de base. (on revenir à la base canonique).

On a : $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} g(e'_1) & g(e'_2) & g(e'_3) \end{array} \end{array} \simeq A$$

On applique le changement de base :

$$\begin{tikzcd} g : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' \arrow[r, dash, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, dash, "A'"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

La matrice que nous devons calculer est
$$A' = P^{-1} \times A \times P$$
avec $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$

Or, on constate que c'est $P^{-1} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ qui est simple à calculer

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} & \end{array}$$

Il suffit donc de calculer l'inverse de cette matrice.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux vecteurs, on pose le système :

le résoudre, c'est calculer $(P^{-1})^{-1} = P$

car $P^{-1} . X = A \iff X = P . A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{A}$$

— pivot $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c \end{pmatrix}$$

— pivot $\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c+b-a \end{pmatrix}}_{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= P} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Donc la matrice de g dans la base canonique devient :

$$A' = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis la forme analytique de g est :

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ 2y \\ 2x - 3y - z \end{pmatrix}$$

Donc

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y - z, 2y, 2x - 3y - z)$$

Calculons ensuite son noyau et son image

$\operatorname{Ker} g$ $\updownarrow$ résoudre $g(\vec{x}) = \vec{0}$

$\operatorname{Im} g$ $\updownarrow$ engendrée par $\{g(\vec{i}), g(\vec{j}), g(\vec{k})\}$ ou $\{g(e'_1), g(e'_2), g(e'_3)\}$

↪ rang de ces vecteurs ?

théorème du rang

On va calculer $\mathrm{Im}\, g \rightsquigarrow \mathrm{Vect}\{g(e'_1), g(e'_2), g(e'_3)\}$

$$\mathrm{Vect}\{e'_1+e'_2,\ 2e'_3,\ e'_2-e'_1\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$(\mathcal{S})$ $\begin{cases} u_1=(1,2,-1) \\ u_2=(0,0,2) \\ u_3=(-1,0,-1) \end{cases}$ — pivot

$u'_3 = u_3 + u_1$

$rg(\mathcal{S}) = rg(\mathcal{S}')$

$(\mathcal{S}')$ $\begin{cases} u_1=(1,2,-1) \\ u_2=(0,0,2) \\ u'_3=(0,2,-2) \end{cases}$

si on inverse ces 2 vect. le système est triangulaire

Donc $\Leftarrow$

$rg(\mathcal{S}') = rg(\mathcal{S}) = 3$

Puis comme $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$

$\Downarrow$

$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}\, g)}_{=3} + \underbrace{\dim(\ker g)}_{0}$

Puis, par le théorème du rang : $\ker g = \{\vec{0}\}$

Correction de la fin de l'exercice 3

iii) On pose f le projecteur sur G // F

q " " K // L

a)

Pour trouver les expressions analytiques de f et q, on doit calculer leurs matrices dans la base canonique.

$\rightsquigarrow F = \{(x,y,z) \,;\, x-y+z=0\}$

$\hookrightarrow$ syst. linéaire 1 éq, 3 inconnues $\Rightarrow$ 2 param $\rightarrow y, z$

et $x = y - z$

$= \{(y-z, y, z) \,;\, y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y\cdot(1,1,0) + z(-1,0,1) \,;\, y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(\{(1,1,0), (-1,0,1)\})$

• Si on considère la base $\{(1,1,0), (-1,0,1), \underbrace{(1,1,1)}_{g}\} = \mathcal{B}$ la matrice de f dans cette base est évidente :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer le changement de base vers la base canonique $(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad A' = P^{-1} \times A \times P$$

où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Ici aussi, c'est P^{-1} qui est simple à obtenir :

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on pose le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \end{array} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{pivot} \\ \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-b+a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = a + y - z = -a + 2b - c \\ y = -a + b \\ z = c - b + a \end{cases} \qquad P \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Puis

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'expression analytique de p est :

$$p(x,y,z) = (2x - y - z,\ 3x - 2y - z,\ x - y)$$

- Idem pour q, dans la base

$$\mathcal{B}' = \{(1,0,-1), (-2,1,1), (1,2,1)\}$$

sa matrice est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue le changement pour la base canonique :

$$\begin{tikzcd} q : \mathbb{R}^3 \arrow[rr] & & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' \arrow[rr, "B"] \arrow[d, bend right, "P"'] & & \mathcal{B}' \arrow[d, bend left, "P"] \\ \mathcal{C} \arrow[rr, "B'"'] & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$$B' = P^{-1} \times B \times P$$

C'est $P^{-1} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on obtient facilement

On calcule P par inverse.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tq $P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

— pivot

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c + a \end{pmatrix}$$

— pivot

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$P \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + b + c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}(3b - a - 5c) \\ y = \frac{1}{2}(b - a - c) \\ z = \frac{1}{4}(a + b + c) \end{cases}$$

D'où $P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Puis $B' = P^{-1} \times B \times P = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\| \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Donc $q(x,y,z) = \frac{1}{4}\left(-x-y-z,\ 2(-x+y-z),\ 3x-y+3z\right)$

e) On souhaite montrer que $p \circ q = 0$

soit par les formes analytiques en calculant $p(q(x,y,z))$

soit via les matrices $A' \times B'$ $\Uparrow$ méthode utilisée ici

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix} = 0$$

Donc $\boxed{p \circ q = 0}$

c) On définit alors $r = p + q - q \circ p$

Pour vérifier que r est un projecteur, il suffit de vérifier que $r^2 = r$.

$$r^2 = (p+q-qp) \circ (p+q-qp) = p(p+q-qp) + q(p+q-qp) + -qp(p+q-qp)$$

p, q projecteurs $\Rightarrow p^2 = p,\ q^2 = q$

$$\| \qquad (\underbrace{p^2}_{p} + \underbrace{pq}_{0} - \underbrace{pqp}_{0}) + (\cancel{qp} + \underbrace{q^2}_{q} - \cancel{\underbrace{q^2}_{q}p}) - (q\underbrace{p^2}_{p} + q\overset{0}{\widehat{pq}} - q\overset{0}{\widehat{pq}}p)$$

$= p + q - pq = r.$

Donc r est bien un projecteur.

Ker r ?

Im r ?