Ex. 5

Soient $\{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\} = \mathcal{B}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrons que c'est une base.

On sait que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4 (du fait de sa base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$.

$\rightsquigarrow$ donc $\mathcal{B}$ a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4

$\rightsquigarrow$ il suffit donc de prouver que c'est une famille libre <u>ou</u> génératrice.

Montrons qu'elle est <u>libre</u>.

Soient $\lambda_1 \dots \lambda_4$ tels que :

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (1-X) + \lambda_3 \cdot (X - X^2) + \lambda_4 \cdot (X^2 - X^3) = 0$$

on "classe par degrés"

$$\iff (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1 + (\lambda_3 - \lambda_2) X + (\lambda_4 - \lambda_3) X^2 - \lambda_4 X^3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow[\text{résolution directe en partant du bas}]{\text{déjà triangularisé}} \quad \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Donc c'est bien une base.

On veut calculer les coordonnées de $P(X) = 3X - X^2 + 8X^3$ dans cette base.

<u>Méthode 1</u> "à la main"

On prend des variables pour les coordonnées, on écrit la décomposition et on résout :

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$:

$$P(X) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (1-X) + \alpha_3 \cdot (X - X^2) + \alpha_4 \cdot (X^2 - X^3)$$

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ 3X - X^2 + 8X^3 & & (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 1 + (\alpha_3 - \alpha_2) X + (\alpha_4 - \alpha_3) X^2 - \alpha_4 X^3 \end{matrix}$$

En identifiant les termes du même degré, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2+\alpha_3 = 3 \\ -\alpha_3+\alpha_4 = -1 \\ -\alpha_4 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = -10 \\ \alpha_3 = -7 \\ \alpha_4 = -8 \end{cases}$$

Donc $P(X) = 10 - 10.(1-X) - 7(X-X^2) - 8(X^2-X^3)$
et cette décomposition est unique car $\mathcal{B}$ est une base.

Méthode 2 formules de changement de base

On connait P dans la base canonique du $\mathbb{R}_3[X]$. Ses coordonnées sont :

$$X_{\mathcal{C}}(P) = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 8 \end{vmatrix} = X \qquad \mathcal{C} = \{1, X, X^2, X^3\}$$

On veut calculer $X_{\mathcal{B}}(P) = X'$

$P(X)$

X base $\mathcal{C}$

$\downarrow P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P$

X' base $\mathcal{B}$

On a :

$X = PX'$

Donc $X' = P^{-1}.X$

Il faut donc calculer P^{-1} ...

On a :

$$P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\} \text{dans la base canonique } \mathcal{C}$$

nouvelle $\longrightarrow$ $\underbrace{1 \quad 1-X \quad X-X^2 \quad X^2-X^3}_{\text{coords du } \mathcal{B}}$ ancienne

Pour calculer P^{-1}, posons $X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}$ et $A = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$

On pose le système $PX = A$ que l'on résoud $\rightsquigarrow X = P^{-1}.A$

$PX = A$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} \iff \begin{cases} x+y = a \\ -y+z = b \\ -z+t = c \\ -t = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a+d+c+b \\ y = -d-c-b \\ z = -d-c \\ t = -d \end{cases} = P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Rem : ce calcul est identique à la méthode 1, mais on est dans le cas général, pas juste pour $3X - X^2 + 8X^3$

On obtient donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Puis :

$$X' = P^{-1}\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Fort heureusement, on retrouve le même résultat...

Ex. 6

Soient $x_1 = (1, 2, -5, 3)$
$x_2 = (2, -1, 4, 7)$
$x_3 = (-12, 4, \lambda, \mu)$

A quelle condition a-t-on $x_3 \in \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$?

Pour cela, il suffit que $\to$ x_3 soit c.l. de x_1, x_2

$\Updownarrow$

x_1, x_2, x_3 non libres $\leftarrow$ on va partir de cette version mais les autres sont aussi possibles

$\Updownarrow$

$\mathrm{rang}(x_1, x_2, x_3) = 2$

Soient α, β, γ tq

$$\alpha . x_1 + \beta . x_2 + \gamma . x_3 = \vec{0}$$

$$\iff \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \vec{0}$$

on résoud par pivot de Gauss

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta - 12\gamma = 0 & \leftarrow \text{pivot} \\ 2\alpha - \beta + 4\gamma = 0 & \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ -5\alpha + 4\beta + \lambda.\gamma = 0 & \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 5\ell_1 \\ 3\alpha + 7\beta + \mu.\gamma = 0 & \ell_4 \leftarrow \ell_3 - 3\ell_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta - 12\gamma = 0 \\ -5\beta + 28\gamma = 0 \\ 14\beta + (\lambda - 60)\gamma = 0 \\ \beta + (\mu + 36)\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta - 12\gamma = 0 \\ -5\beta + 28\gamma = 0 & \ell_2 \leftarrow \ell_2 + 5\ell_4 \\ 14\beta + (\lambda - 60)\gamma = 0 & \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 14\ell_4 \\ \beta + (\mu+36)\gamma = 0 & \leftarrow \text{pivot} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta - 12\gamma = 0 \\ \beta + (\mu+36)\gamma = 0 \\ (5\mu + 206)\gamma = 0 \\ (\lambda - 14\mu - 564)\gamma = 0 \end{cases}$$

Pour que $x_3 \in \text{Vect}\{x_1, x_2\}$, ce système ne doit pas admettre que la solution nulle.
Pour cela, les 2 dernières lignes doivent devenir nulles, ie :

$$\begin{cases} 5\mu + 206 = 0 \\ \lambda - 14\mu - 564 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{206}{5} \\ \lambda = 14 \cdot \mu - 564 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = \frac{206}{5} \\ \lambda = \frac{64}{5} \end{cases}$$

Ex. 7

Soit $V = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \exists g, h \text{ croissantes tq } f = g - h \}$

Montrons que V est un $\mathbb{R}$-ev.

- (V, +) est un groupe commutatif !

$\rightsquigarrow$ Montrons que la somme de fonctions est bien une l.c.i dans V :

soient $f_1, f_2 \in V$: $\exists\, g_1, g_2, h_1, h_2 \nearrow$ tq

$f_1 = g_1 - h_1$

$f_2 = g_2 - h_2$

On a alors $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$

or, la somme de 2 fonctions croissantes est croissante, donc

$g_1 + g_2$ et $h_1 + h_2$ sont $\nearrow$, puis

$f_1 + f_2 \in V$.

$\rightsquigarrow$ la somme de fonctions est clairement associative et commutative

$\rightsquigarrow$ neutre : soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 0$ la fonction toujours nulle

f_0 est croissante (on a bien $x \leq y \Rightarrow f_0(x) \leq f_0(y)$ ...)

On a : $f_0 = f_0 - f_0$ (puisque $f_0(x) = 0 = 0 - 0 \ldots$)

Donc $f_0 \in V$.

et $\forall f \in V$: $\underset{\underset{f_0 + f \text{ par commutativité}}{\shortparallel}}{f + f_0} = f$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$ $f + f_0(x) = f(x) + \underbrace{f_0(x)}_{0} \ldots$)

Donc f_0 est le neutre

⇝ <u>symétrisables</u>

Toute fonction est symétrisable pour $+$, et $\tilde{f} = -f$

Or, si $f \in V$, $\exists g, h \nearrow$ tq $f = g - h$

$\Rightarrow \underbrace{-f = h - g}$ et g, h sont bien croissants

$\Rightarrow -f \in V$.

<u>C.l.</u> : $(V, +)$ est un groupe commutatif.

- <u>Commutations $\cdot$ / $+$</u>

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in V$

Il faut prouver que

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda+\mu)\cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f \\ (\lambda \times \mu)\cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f) \\ \lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g \\ 1 \cdot f = f \end{array}\right.$$

et toutes ces égalités sont évidentes

Donc $(V, +, \cdot)$ est bien un $\mathbb{R}$-ev.

<u>Ex. 8</u> On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition classique des vecteurs $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ et de la multiplication externe :

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, 0)$$

Obtient-on un $\mathbb{R}$-ev ?

- <u>Partie groupe</u> : comme l'addition est classique, $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif.

- <u>Commutations :</u>

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

i) $(\lambda+\mu).(x,y) \overset{?}{=} \lambda.(x,y) + \mu.(x,y)$

$$((\lambda+\mu)x, 0) = (\lambda.x, 0) + (\mu.x, 0)$$

OK

ii) $(\lambda\times\mu).(x,y) \overset{?}{=} \lambda.(\mu.(x,y))$

$$(\lambda\times\mu.x, 0) = \lambda.(\mu x, 0) = (\lambda\mu x, 0)$$

OK

iii) $\lambda.((x,y)+(x',y')) \overset{?}{=} \lambda.(x,y) + \lambda.(x',y')$

$$\lambda.(x+x', y+y') = (\lambda.(x+x'), 0) = (\lambda.x, 0) + (\lambda.x', 0)$$

OK

iv) $1.(x,y) \overset{?}{=} (x,y)$

$$(1.x, 0) \neq$$

⚠ Donc ne pas oublier cette dernière commutation, elle est importante !

<u>Ex. 9</u>

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $u, v, w \in E$.

Montrons que u, v, w libre $\Longleftrightarrow \{u+v, v+w, w+u\}$ libre.

On fait naturellement la preuve par double implication.

- <u>On suppose $\{u,v,w\}$ libre.</u> $\{u+v, v+w, w+u\}$ libres ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tq $\alpha.(u+v) + \beta.(v+w) + \gamma.(w+u) = 0$

$$\Longleftrightarrow (\alpha+\gamma).u + (\alpha+\beta).v + (\beta+\gamma).w = 0$$

or $\{u,v,w\}$ sont libres, donc une comb. linéaire nulle de ces vecteurs est forcément à coefficients nuls !

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \ell_1 \leftarrow \ell_1-\ell_2 \\ \text{pivot} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ -\beta+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ -\beta+\gamma=0 \\ 2\gamma=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Donc $\{u+v, v+w, w+u\}$ est bien libre ...

- L'autre implication se démontre de même ...

Ex. 10

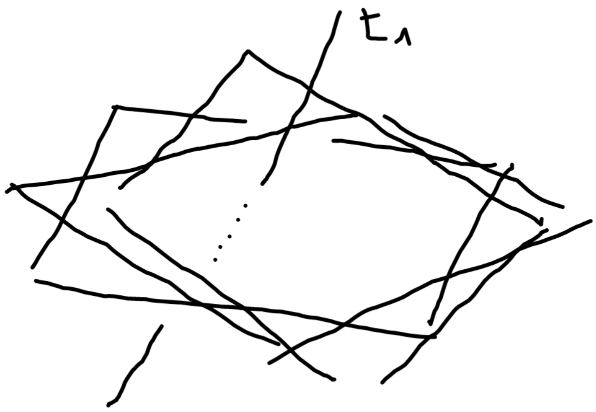
On cherche des sev supplémentaires d'espaces donnés

i) $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,2,0)\}$

↳ cet espace est une droite

un supplémentaire est un sev F tq
$$E_1 \oplus F = \mathbb{R}^3$$

Donc tout bêtement, c'est un plan $\mathcal{P}$ tel que
$$E_1 \not\subset \mathcal{P} \ldots$$



forcément, il y en a une infinité !

On veut juste en trouver 1

⇝ il suffit donc de donner 2 vecteurs non colinéaires entre eux et n'appartenant pas à E_1...

Par exemple:
$$\left.\begin{array}{l} u=(1,0,0) \\ v=(0,0,1) \end{array}\right) \quad \text{on a clairement } (1,2,0) \notin \mathrm{Vect}\{u,v\}$$

et u,v indépendants.

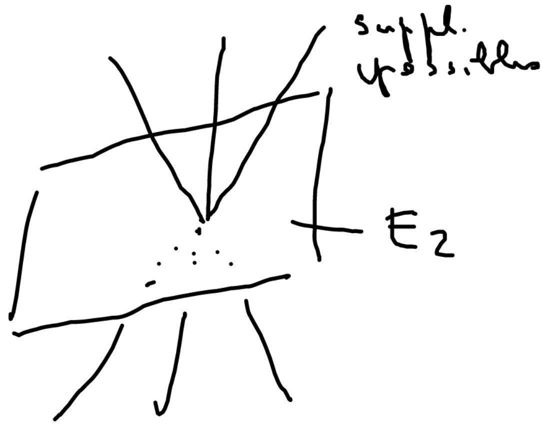
Donc $F = \text{Vect}\{u,v\}$ est un supplémentaire de E_1.

ii) $E_2 = \text{Vect}\{(1,1,0),(-1,1,0)\}$

↳ cette fois, E_2 est un plan, donc un supplémentaire est une droite n'appartenant pas à ce plan
⇝ il faut trouver un vect u tq $\{u,(1,1,0),(-1,1,0)\}$ soient libres

Il est évident que c'est le cas pour $u=(0,0,1)$ (mais on aurait pu prendre $(1,0,1)$ ou $(0,1,1)$ .....)

Soit $F = \text{Vect}\{u\}$
F est un supplémentaire de E_2



iii) $E_3 = \{(1,1,1),(0,1,0)\}$

↳ idem, E_3 est un plan, donc il suffit de trouver un vecteur ne lui appartenant pas ..

Soit $u=(1,0,0)$, montrons que $\{u,(1,1,1),(0,1,0)\}$ est libre

Soient α,β,γ tq $\alpha.\overbrace{(1,0,0)}^{u} + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,0) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

⇝ Donc $F = \text{Vect}\{(1,0,0)\}$ est un suppl. de E_3.

Ex. 11 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (disons n).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E \ \exists p_x \in \mathbb{N}$ tq $f^{p_x}(x) = 0$

La question est de savoir si on peut trouver une puissance " commune pour tous les x", ie :

$\exists ? \, p \in \mathbb{N}$ tq $f^p = 0$?

La dimension finie est fondamentale ...

↳ soient $e_1, \dots, e_n$ une base.

Pour chaque e_i, il existe une puissance p_{e_i} tq

$$f^{p_{e_i}}(e_i) = \vec{0}$$

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p_{e_i}}$$

On pose

$p = \max(p_{e_1}, \dots, p_{e_n})$

Montrons que $f^p = 0$, c'est-à-dire :

$\forall x \in E \quad f^p(x) = 0$

Soit $x \in E$, comme $e_1 \dots e_n$ est une base :

$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tq $x = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$

or f est linéaire $\Rightarrow$ $f(x) = f(\alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n)$

$= \alpha_1 \cdot f(e_1) + \dots + \alpha_n \cdot f(e_n)$

puis : en répétant pour chaque composée $\quad f^p(x) = \alpha_1 \cdot \underbrace{f^p(e_1)}_{= 0 \text{ car } p \geq p_{e_1}} + \dots + \alpha_n \underbrace{f^p(e_n)}_{= 0 \text{ car } p \geq p_{e_n}} = \vec{0}.$

Donc $\boxed{f^p = 0}$

Ex. 12 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

P et I les fonctions respectivement paires et impaires

$f(-x) = -f(x)$ $\qquad$ $f(-x) = f(x)$

Montrons que P et I sont des sev supplémentaires.

1) ce sont des sev :

- La fonction nulle appartient aux deux, donc ils sont non vides.
- Si $f, g \in P$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda \underbrace{f(-x)}_{= f(x)} + \mu \underbrace{g(-x)}_{= g(x)}$$
car f, g sont paires

Donc $\lambda f + \mu g \in P$ (idem pour I).

2) Reste à montrer qu'ils sont supplémentaires, ie : que $E = P \oplus I$

$E = P + I$? $\qquad P \cap I = \{\vec{0}\}$?

soit $f \in E$

$\forall x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x) \right)$$

cette fonction est paire ... c'est évident

celle-ci impaire

c'est juste un tour de passe-passe en faisant $+ f(-x) - f(-x)$

Donc
$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\in P} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\in I}$$

Et donc $E = P + I$

⤳ Reste à prouver que $P \cap I = \{0\}$ ici, la fonction nulle !

Soit f à la fois paire et impaire

$\forall x \quad f(-x) = -f(x)$, avec $f(-x) = f(x)$
$$\Longrightarrow f(x) = -f(x)$$
puis $2 . f(x) = 0$
$$\Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$$

Puis $E = P \oplus I$ qui sont donc supplémentaires.

Ex. 13

Soit $S = \mathrm{Vect}(\{\overset{e_1}{(1,-1,2,3)}, \overset{e_2}{(1,1,2,0)}, \overset{e_3}{(3,-1,6,-6)}\})$

et $T = \mathrm{Vect}(\{\underset{e_4}{(0,2,0,3)}, \underset{e_5}{(1,0,1,0)}\})$

On calcule $\dim(S)$, $\dim(T)$, $\dim(S+T)$ et $\dim(S\cap T)$ ainsi que $S+T$ et $S\cap T$.

- Pour calculer $\dim(S)$ $\rightsquigarrow$ il suffit de connaître $\mathrm{rang}(\{e_1, e_2, e_3\})$

Rang de $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} e_1 = (1,-1,2,3) & \text{— pivot} \\ e_2 = (1,1,2,0) & \text{— } e'_2 = e_2 - e_1 \\ e_3 = (3,-1,6,-6) & \text{— } e'_3 = e_3 - 3e_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}' = \begin{cases} e_1 = (1,-1,2,3) & \text{pivot} \\ e'_2 = (0,2,0,-3) \\ e'_3 = (0,2,0,-15) & e''_3 = e'_3 - e'_2 \end{cases}$$

$\mathrm{rg}(\mathcal{S}) = \mathrm{rg}(\mathcal{S}')$

$$\mathcal{S}'' = \begin{cases} e_1 = (1,-1,2,3) \\ e'_2 = (0,2,0,3) \\ e''_3 = (0,0,0,-12) \end{cases} \rightsquigarrow \text{rang } 3$$

avec $\mathrm{rg}(\mathcal{S}'') = \mathrm{rg}(\mathcal{S}')$

donc $\dim(S) = 3$.

- Pour calculer $\dim(T)$, idem, on regarde $\mathrm{rg}\{e_4, e_5\}$
  Il est clair qu'ils sont libres (pas multiple l'un de l'autre, avec 2 vecteurs c'est plus simple)

- Pour calculer $\dim(S+T)$ / $\dim(S\cap T)$

On sait que $\dim(S) + \dim(T) = \dim(S+T) + \dim(S\cap T)$

Donc il suffit de calculer l'un des deux

$\dim(S+T)$ $\rightsquigarrow$ rang de $e_1 \dots e_5$

$\dim(S\cap T)$ $\rightsquigarrow$ calculer $S\cap T$

$\hookrightarrow$ pour changer, c'est ce que l'on va faire, mais l'autre méthode est en fait plus simple.

Calcul de $S\cap T$:

on le fait de la manière la plus évidente :

$$\vec{x} \in S\cap T \iff \vec{x} = \lambda.\vec{e_1} + \mu.\vec{e_2} + \nu\vec{e_3} = \alpha.\vec{e_4} + \beta\vec{e_5}$$

Donc
$$\vec{x} = \lambda.(1,-1,2,3) + \mu(1,1,2,0) + \nu.(3,-1,6,-6) = \alpha.(0,2,0,3) + \beta.(1,0,1,0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu = \beta \\ -\lambda+\mu-\nu = 2\alpha \\ 2\lambda+2\mu+6\nu = \beta \\ 3\lambda - 6\nu = 3\alpha \end{cases}$$

on passe toutes les inconnues à $\iff$ gauche pour créer un syst. linéaire

$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu-\beta=0 & \text{— pivot} \\ -\lambda+\mu-\nu-2\alpha=0 & \ell_2 \leftarrow \ell_2+\ell_1 \\ 2\lambda+2\mu+6\nu-\beta=0 & \ell_3 \leftarrow \ell_3-2\ell_1 \\ 3\lambda-6\nu-3\alpha=0 & \ell_4 \leftarrow \ell_4-3\ell_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu-\beta=0 \\ 2\mu+2\nu-2\alpha-\beta=0 & \ell_2 \leftarrow \ell_2+2\ell_4 \\ \beta=0 \\ -\cancel{3}\mu-\cancel{15}^{5}\nu-\cancel{3}\alpha+\cancel{3}\beta=0 & \text{— pivot} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu-\beta=0 \\ -\mu-5\nu-\alpha+\beta=0 \\ -8\nu-4\alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

4 équations
5 inconnues
1 paramètre
↳ ν

$$\iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=-3\nu \\ \alpha=-2\nu \\ \beta=0 \end{cases}$$

Donc $\vec{x} \in S\cap T$ s'écrit

$$-3\nu.e_2+\nu.e_3 = -2\nu.e_4$$
$$= \nu.(-3e_2+e_3)$$

Donc $S \cap T = \text{Vect}\{-3e_2 + e_3\} = \text{Vect}\{e_4\}$

c'est une droite

$\Rightarrow \dim(S \cap T) = \underline{1}$ (en fait, cela correspond au nombre de paramètres pour résoudre le système).

On en déduit que $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

$= 3 + 2 - 1$

$= 4$

Donc parmi $\{e_1 \ldots e_5\}$, seuls 4 sont libres (en effet : $-3e_2 + e_3$ est colinéaire à e_4 ...)