Correction des exercices d'entraînement TD2 - fin

Exercice 12.

Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = y - x \quad (\text{i.e. } \underbrace{x^2 + x}_{f(x)} = y^2 + y)$$

En posant $f(x) = x^2 + x$, on observe que $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$ et $\mathcal{R}$ est trivialement une rel. d'équiv.

i) • $\dot{0} = \{x \in \mathbb{R} ; x \mathcal{R} 0\}$

Donc $x \in \dot{0} \iff \underbrace{x^2 + x}_{x(x+1)} = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.

Donc $\dot{0} = \{0, -1\}$

• $\dot{1} = \{x \in \mathbb{R} ; x \mathcal{R} 1\}$

$x \in \dot{1} \iff x^2 + x = 2 \iff x^2 + x - 2 = 0$ $\quad \Delta = 1 + 8 = 9$

racines : $\frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ → 1, -2

$\iff (x-1)(x+2) = 0$

D'où $\dot{1} = \{1, -2\}$

• $\dot{-1}$. Comme $-1 \in \dot{0}$, on a $\dot{-1} = \dot{0}$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad \dot{x} = \{y \in \mathbb{R} ; x \mathcal{R} y\}$

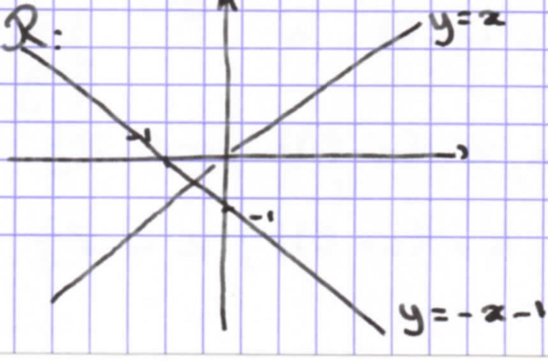
$y \in \dot{x} \iff x^2 + x = y^2 + y$

$\iff \underbrace{x^2 - y^2}_{(x-y)(x+y)} = y - x \iff (x-y)(x+y+1) = 0$

$\iff \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ $\leadsto y = -x - 1$

$\dot{x} = \{x, -x-1\}$

iii) D'où le graphe de $\mathcal{R}$:



Exercice 13.

On définit sur $\mathbb{Z}^2$:

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(x,y) \iff \underbrace{(a-b)^2}_{f(a,b)} = (x-y)^2$$

$$\iff f(a,b) = f(x,y)$$ ⇝ donc trivialement une rel. d'équivalence.

i) $\dot{\overline{(0,0)}} = \{(x,y)\ ;\ (x-y)^2 = 0\}$

$(x-y)^2 = 0 \iff x = y$

$\dot{\overline{(0,0)}} = \{(x,x)\ ;\ x \in \mathbb{Z}\}$.

$\dot{\overline{(3,1)}} = \{(x,y)\ ;\ (x-y)^2 = (3-1)^2\}$

donc $(x,y) \in \dot{(3,1)} \iff (x-y)^2 = 2^2$

$\iff (x-y)^2 - 2^2 = 0$

$\iff (x-y-2)(x-y+2) = 0$

ie $\{y = x-2$ ou $y = x+2$

$\dot{(3,1)} = \{(x,x-2)\ ;\ x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,x+2)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$

$\dot{\overline{(2,4)}}$. On a : $(3,1)\,\mathcal{R}\,(2,4)$ car

$(3-1)^2 = (2-4)^2$

Donc $\dot{(2,4)} = \dot{(3,1)}$

ii) Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

$\dot{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ \underbrace{(x-y)^2 = (a-b)^2}\}$

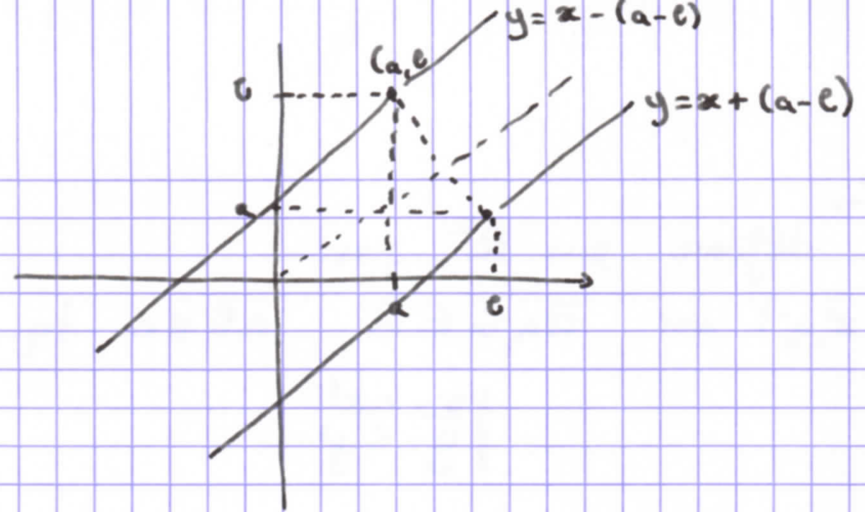
$\iff (x-y)^2 - (a-b)^2 = 0$

$\iff (x-y-(a-b))(x-y+a-b) = 0$

$\iff \begin{cases} x-y-(a-b) = 0 \\ \text{ou} \\ x-y+(a-b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x-(a-b) \\ \text{ou} \\ y = x+(a-b) \end{cases}$

$\dot{(a,b)} = \{(x, x-(a-b))\ ;\ x \in \mathbb{Z}\}$
$\cup$
$\{(x, x+(a-b))\ ;\ x \in \mathbb{Z}\}$

iii)



<u>Exercice 15.</u>

i) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ ssi $xy = x'y'$

$\mathcal{R}$ est clairement réflexive et symétrique. La question est donc celle de sa transitivité, qui ne pose pas plus de problème (si $xy = x'y'$ et $x'y' = x''y''$ ...)

Donc c'est une relation d'équivalence.

ii) $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ ssi $\begin{cases} xy = x'y' \\ xx' \geq 0 \end{cases}$

Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}$

→ réflexive :

$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y)$ car $xy = xy$.

→ symétrique :

si $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$: $\begin{cases} xy = x'y' \Rightarrow x'y' = xy \Rightarrow (x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y) \\ xx' \geq 0 \Longrightarrow x'x \geq 0. \end{cases}$

→ transitive :

$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ et $(x',y')\,\mathcal{R}\,(x'',y'')$ $\begin{cases} xy = x'y' \\ xx' \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'y' = x''y'' \\ x'x'' \geq 0 \end{cases}$ → d'où $xy = x''y''$

<u>Mais</u> $xx' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x' \geq 0 \end{cases}$ ① ou $\begin{cases} x \leq 0 \\ x' \leq 0 \end{cases}$ ②

De même $x'x'' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' \geq 0 \\ x'' \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' \leq 0 \\ x'' \leq 0 \end{cases}$

- Si $x \geq 0 \underset{①}{\Rightarrow} x' \geq 0 \underset{②}{\Rightarrow} x'' \geq 0$
- Si $x \leq 0 \underset{①}{\Rightarrow} x' \leq 0 \underset{②}{\Rightarrow} x'' \leq 0$

d'où $\underline{xx'' \geq 0}$

Puis $\mathcal{R}$ rel. d'équivalence.

Exercice 16.

Soit $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ $ab \neq 0$ tq

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

- Montrons que $\mathcal{R}$ rel. d'équivalence

→ réflexive : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x = 1.x \\ y = 1.y \end{cases}$ ✓

→ symétrique : soit $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tq $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$

$\Rightarrow \exists a, b$ tq $ab \neq 0$ avec $x = ax'$
ie $a \neq 0$ et $b \neq 0$ $\quad y = by'$

D'où : $x' = \frac{1}{a} x$
$y' = \frac{1}{b} y$ $\quad$ car $a, b \neq 0$

Puis $(x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y)$.

→ transitive : soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tq

$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ $\quad$ et $\quad$ $(x',y')\,\mathcal{R}\,(x'',y'')$

$\exists a, b \neq 0$ tq $\quad$ $\exists a', b'$ tq
$x = ax'$ $\quad$ $x' = a'x''$ $\quad \rightarrow \quad x = aa'x''$
$y = by'$ $\quad$ $y' = b'y''$ $\quad\quad\quad y = bb'y''$

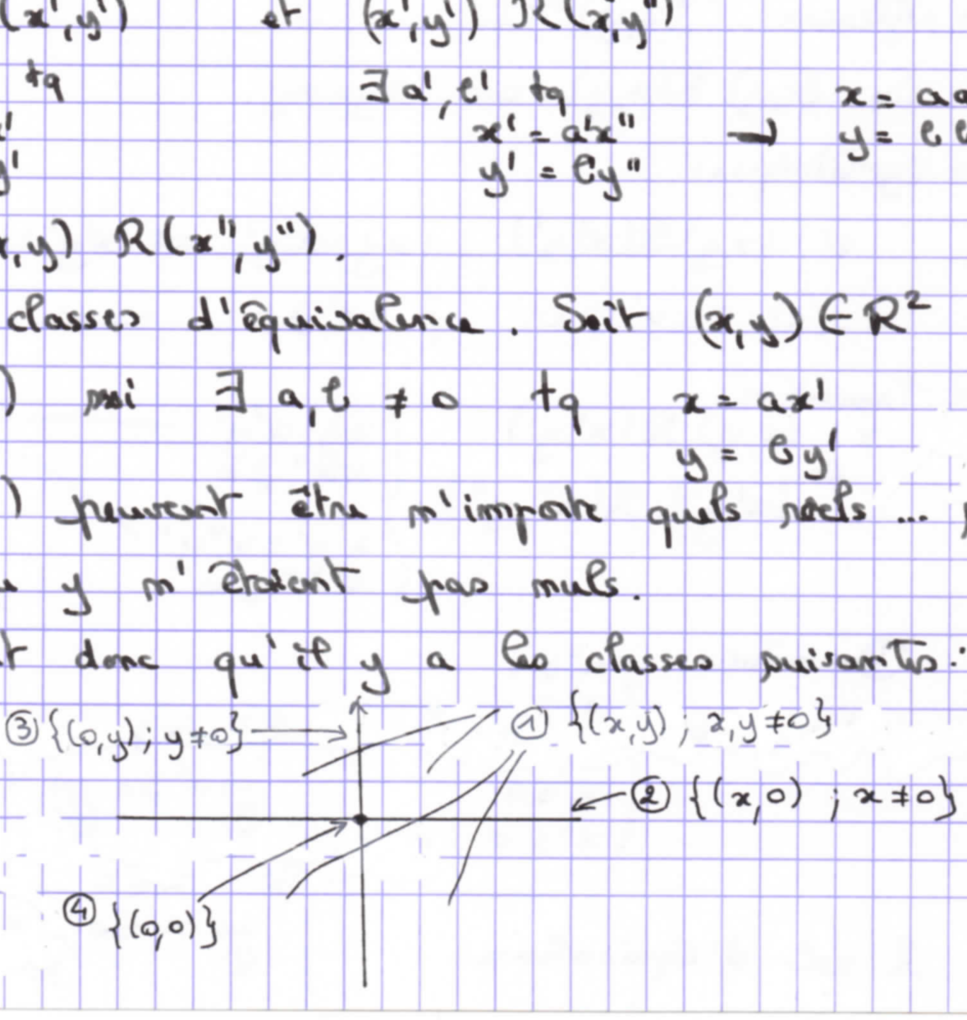
Puis $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x'',y'')$.

- Calculons les classes d'équivalence. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x',y') \in \dot{(x,y)}$ ssi $\exists a, b \neq 0$ tq $x = ax'$
$y = by'$

Donc (x',y') peuvent être n'importe quels réels ... sauf 0 si x ou y n'étaient pas nuls.

On en déduit donc qu'il y a les classes suivantes :



Si la contrainte est $ab > 0$, le signe "compte" :

On obtient donc les classes d'équivalence suivantes :