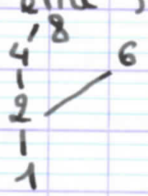
Correction des exercices d'entraînement TD2

Exercice 4. Sur $\mathbb{N}^*$, on considère la relation de divisibilité (notée $\mathcal{R}$).

i) Montrons que c'est une relation d'ordre (voir ex 3 _ TD)
Nous avons vu que c'est un ordre partiel.

ii) On pose $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$
La relation peut être représentée par :



$\longrightarrow$ sur A, l'ordre est partiel

$\rightsquigarrow$ il apparaît clairement que $\min(A) = 1$
et A n'a pas de max.

$\rightsquigarrow$ comme $\min(A) = 1 \Rightarrow \inf(A) = 1$, puis les minorants de A sont les entiers divisant 1 ...
il n'y a que $\{1\}$ ...

$\rightsquigarrow$ M est un majorant de A ssi

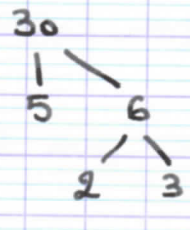
$$\left.\begin{array}{l} 8 \mid M \\ 6 \mid M \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ppcm}(6,8) \mid M$$

$6 = 3 \times 2$, $8 = 2^3$ $\Rightarrow$ $\text{ppcm}(6,8) = 3.2^3 = 24.$

Majorants de A : $\{24.k \,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$

d'où $\sup(A) = 24.$

iii) On pose ensuite $B = \{2, 3, 5, 6, 30\}$



$\longrightarrow$ sur B, l'ordre est partiel.

$\rightsquigarrow$ il apparaît que $\max(B) = 30$
d'où $\sup(B) = 30$
et $\text{majorants}(B) = \{30.k \,;\, k \in \mathbb{N}^*\}.$

⇝ par contre, B n'a pas de minimum.
Si m est un minorant de B:

$$\left.\begin{array}{l} m \mid 2 \\ m \mid 3 \\ m \mid 5 \end{array}\right\} \text{ donc } m \mid \operatorname{pgcd}(2,3,5) = 1$$

puis minorants$(B) = \{1\}$ et $\inf(B) = 1$.

<u>Exercice 5.</u> Sur $\mathbb{N}^*$, on définit la relation
$p \mathcal{R} q$ ssi $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $q = p^k$.

i) Montrons que $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$:

→ réflexive : soit $p \in \mathbb{N}^*$ $p = p^1 \Rightarrow p \mathcal{R} p$.

→ antisymétrique : soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tq
$p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} p$ $\quad p = q$?
$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$
$\exists k$ tq $q = p^k$ $\qquad \exists k'$ tq $p = q^{k'}$

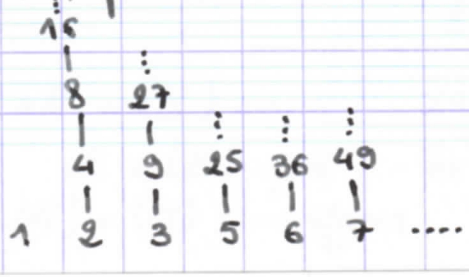
en injectant : $q = q^{kk'} \Rightarrow kk' = 1$ puis $k = k' = 1$.
D'où $p = q^1 = q$.

→ transitive : soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tq $p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} r$.
$p \mathcal{R} r$? $\quad$ comme $p \mathcal{R} q \to \exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $q = r^k$
$q \mathcal{R} r \to \exists k' \in \mathbb{N}^*$ tq $r = q^{k'}$

d'où :
$r = (p^k)^{k'}$
$= p^{kk'}$

puis $p \mathcal{R} r$.
Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

ii) C'est un ordre partiel car par exemple
$2 \not\mathcal{R}\, 3$ et $3 \not\mathcal{R}\, 2$.
En fait, si on représente l'ordre sur les premiers entiers, on a :



iii) On considère $A = \{2, 3\}$. 2 et 3 sont incomparables pour $\mathcal{R}$, donc $\max(A)$ n'existe pas.

Supposons que M soit un majorant de A, on a :

$$2 \,\mathcal{R}\, M \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } M = 2^k$$
$$3 \,\mathcal{R}\, M \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tq } M = 3^{k'}$$

ce qui est impossible car 2, 3 sont premiers entre eux.

Donc A n'a pas de majorants (et donc pas de borne sup).

Exercice 6.

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$(x,y) \,\mathcal{R}\, (x',y') \text{ ssi } \begin{cases} x \leq x' \\ x \leq y' \\ y \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$$

étudier = étudier les différentes propriétés...

⇝ réflexive :

Soit $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x,y) \,\mathcal{R}\, (x,y')$? on a bien $x \leq x$ et $y \leq y$

mais pas forcément $x \leq y$ et $y \leq x$

Donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.

⇝ antisymétrique :

soient (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$(x,y) \,\mathcal{R}\, (x',y')$ et $(x',y') \,\mathcal{R}\, (x,y)$

$\Downarrow$

$x \leq x'$ $\quad x \leq y'$ $\qquad\qquad x' \leq x$ $\quad x' \leq y$

$y \leq x'$ $\quad \underline{y \leq y'}$ $\qquad\qquad y' \leq x$ $\quad \underline{y' \leq y}$

$\bigcirc \Rightarrow x = x'$

$\sim \Rightarrow y = y'$

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique

⇝ symétrique : soient $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $(x',y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq $(x,y) \,\mathcal{R}\, (x',y')$

On voit clairement qu'on ne peut en déduire $(x',y') \,\mathcal{R}\, (x,y)$.

Donc $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.

⇝ transitive : soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq

$(x,y) \,\mathcal{R}\, (x',y')$ $\quad$ $(x',y') \,\mathcal{R}\, (x'',y'')$

$$\Rightarrow \begin{array}{lclcl}
x \leqslant x' & \xrightarrow{1} & x' \leqslant x'' & \xrightarrow{1} & x \leqslant x'' \\
x \leqslant y' & & x' \leqslant y'' & \xrightarrow{2} & x \leqslant y'' \\
y \leqslant x' & & y' \leqslant x'' & \xrightarrow{3} & y \leqslant x'' \\
y \leqslant y' & \xrightarrow{4} & y' \leqslant y'' & \xrightarrow{4} & y \leqslant y''
\end{array}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

<u>Ccl</u> : $\mathcal{R}$ n'est pas une rel. d'ordre à la réflexivité près.

<u>Exercice 7.</u> Voir exercice 5 ... désolée.