Correction des exercices d'entraînement TD1 - fin

Exercice 24.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

* **Initialisation** $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \frac{0.1}{4}$

* **Au rang n** On suppose $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

* **Au rang n+1** Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{H.R.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2\left(\overbrace{n^2 + 4(n+1)}^{=(n+2)^4}\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Ccl: l'égalité est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

* **Initialisation** $(n=1)$ $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$

* **Au rang n:** On suppose $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

* **Au rang n+1:** Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{H.R.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\overbrace{n^2+2n+1}^{=(n+1)^2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{\cancel{(n+1)}^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ccl: l'égalité est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On peut aussi utiliser que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} \cdots - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Exercice 26.</u> Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x \geqslant -1)$:
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

* <u>Initialisation :</u> $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0.x$
* <u>Au rang n :</u> on suppose que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$
* <u>Au rang n+1 :</u> montrons que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$

On a : $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n . (1+x)$

$(1+x)^n \geqslant 1+nx$ par H.R.

or $1+x \geqslant 0$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant \underbrace{(1+nx)(1+x)}_{} $$
$$= \underbrace{1 + nx + x}_{1+(n+1)x} + nx^2$$

or $x^2 \geqslant 0$

donc $nx^2 \geqslant 0$ puis $\geqslant 1+(n+1)x$

<u>Ccl :</u> $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

<u>Exercice 27.</u> Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

* <u>Initialisation :</u> $\sum_{i=0}^{0} i(i+1) = 0.1 = \frac{0.1.2}{3}$

* <u>Au rang n :</u> on suppose que $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

* <u>Au rang n+1 :</u> montrons que $\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n} i(i+1) + (n+1)(n+2) \overset{H.R.}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad \checkmark$$

<u>Ccl :</u> l'égalité est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 6 \mid 3^n - 3$

* Initialisation: $3^1 - 3 = 0$ et on a bien $6 \mid 0$.
* Au rang n: on suppose que $6 \mid 3^n - 3$
* Au rang n+1: montrons que $6 \mid 3^{n+1} - 3$

on a:

$$3^{n+1} - 3 = 3^n . 3 - 3$$

Par H.R: $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $3^n - 3 = 6.k$

$$\Rightarrow 3^n = 6k + 3$$

D'où $3^{n+1} - 3 = 3(6k+3) - 3$

$$= 6.3k + 9 - 3 = 6(3k+1)$$

Donc $6 \mid 3^{n+1} - 3$.

⚠ erreur: $\sum_{\substack{i=0\\3}}^{n}$ et non 1 ...

Exercice 29.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

* Initialisation: $\sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \left(= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \right)$

* Au rang n: on suppose que $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

* Au rang n+1: montrons que $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \overset{H.R}{=} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+1}(x-1)}{x - 1}$$

$$= \frac{\cancel{x^{n+1}} - 1 + x^{n+2} - \cancel{x^{n+1}}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$$