TD1 — Correction

exercices d'entraînement

Exercice 5.

$A_1 = \{a, b, c\}$

$A_2 = \{a\}$

$x = a$

$A_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$A_4 = \{a, b, c, d\}$

$x \in A_1 \quad x \in A_2 \quad x \in A_4$

$A_2 \subseteq A_1 \qquad A_1 \subseteq A_4$

et donc $A_2 \subseteq A_4$

$A_2 \in A_3$

Exercice 6.

La difficulté tient au fait que les ensembles ne sont pas "typés".

$A_1 = \{a, b\}$

$A_2 = \{a\}$

$A_3 = \{a, \{a, b\}, b, c\}$

$A_4 = \{a, b, c\}$

$A_1 \in A_3$

$A_1 \subseteq A_4$

$A_2 \subseteq A_1 \quad A_2 \subseteq A_3$

$A_2 \subseteq A_4$

$A_4 \subseteq A_3$

Exercice 7.

i) Montrer que $\complement A \cap B = (\complement A) \cup (\complement B)$

A montrer :

$\complement(A \cap B) \subseteq \complement A \cup \complement B$?

Soit $x \in \complement A \cap B$ $\quad x \in \complement A \cup \complement B$?

$\Rightarrow x \notin A \cap B$

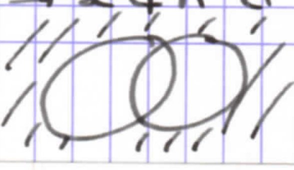
ie $\neg(x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A$ et $x \in B) \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

$\complement A \cup \complement B \subseteq \complement(A \cap B)$?

Soit $x \in \complement A \cup \complement B$ $\quad x \in \complement A \cap B$?

$\Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B$



$\Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \in \complement A \cap B$

i) Montrer que $\complement\complement A = A$.

Montrons que $\complement\complement A \subseteq A$?

Soit $x \in \complement\complement A \Rightarrow x \notin \complement A$.

Par l'absurde, si $x \notin A$: $x \in \complement A$ ce qui est impossible

$\Rightarrow x \in A$.

Montrons que $A \subseteq \complement\complement A$?

Soit $x \in A$ $\qquad x \in \complement\complement A$?

$\Longleftrightarrow$

$x \notin \complement A$.

Idem, par l'absurde, si $x \in \complement A \Rightarrow x \notin A$ contradiction.

Puis

$x \in \complement\complement A$.

Exercice 8.

i) Montrer que $(A\cap B)\cap \complement(A\cap C) = A\cap B\cap \complement C$

Il faut prouver une double inclusion, et donc que

$\forall x \quad x \in (A\cap B)\cap \complement(A\cap C) \Longleftrightarrow x \in A\cap B\cap \complement C$

Soit $x \in (A\cap B)\cap \complement(A\cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A\cap B$ et $x \notin A\cap C$ car $\complement A\cap C = \complement A \cup \complement C$

$\Leftrightarrow (x\in A$ et $x \in B)$ et $(\underbrace{x \notin A}_{\text{impossible car}}$ ou $x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$ et $x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A\cap B\cap \complement C$.

ii) Montrer que $(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C) = A\cap(B\Delta C)$.

De même, il faut montrer que :

$\forall x \quad x \in (A\cap B)\Delta(A\cap C) \Longleftrightarrow x \in A\cap(B\Delta C)$

Soit $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$\Leftrightarrow$ $x \in \complement_{A\cap B} A\cap C$ ou $x \in \complement_{A \cap C} A\cap B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap B$ et $\underbrace{x \notin A \cap C}_{\Leftrightarrow}$ ou $x \in A \cap C$ et $x \notin A \cap B$

$x \notin A$ ou $x \notin C$ $\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $x \in C$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \in B \end{cases}$ et $\begin{cases} x \notin A \\ \text{ou} \\ x \notin C \end{cases}$ impossible — et — impossible: $x \notin A$ ou $x \notin B$

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$x \in A$ et $x \in B$ et $x \notin C$ ou $x \in A$ et $x \in C$ et $x \notin B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $x \in B \Delta C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap (B \Delta C)$.

rem: on peut aussi utiliser i) pour conclure plus rapidement...

Exercice 9.

i) Montrer que $(A \cup B) \cap \complement A\cup C = \complement A \cap B \cap \complement C$

Montrons le par double inclusion.

- Soit $x \in (A \cup B) \cap \complement (A \cup C)$ $\quad$ $x \in \complement A \cap B \cap \complement C$?

$\Rightarrow$ $x \in A \cup B$ et $x \in \complement A \cap \complement C$

$\Rightarrow$ $(x \in A$ ou $x \in B)$ et $(\underline{x \notin A}$ et $x \notin C)$

donc le cas du ou est impossible, puis $x \in B$ nécessairement

$\Rightarrow$ $x \in B$ et $x \notin A$ et $x \notin C$

$\Rightarrow$ $x \in \complement A \cap B \cap \complement C$.

• Réciproquement, si $x \in \complement A \cap B \cap \complement C$, a-t-on $x \in (A \cup B) \cap \complement(A \cup C)$?

On a :

$$x \notin A \text{ et } \underbrace{x \in B}_{\Downarrow \; x \in A \cup B} \text{ et } x \notin C$$

$$\text{et } x \notin A \text{ et } x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{\complement A \cap \complement C}_{= \; \complement A \cup C}$$

D'où $x \in (A \cup B) \cap \complement(A \cup C)$.

ii) On a :

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \underbrace{\complement_{A\cup B}^{A \cup C}} \cup \complement_{A \cup C}^{A \cup B}$$

car on a : $\complement_B^A = (\complement A) \cap B$ $\forall A, B$

$$= \underbrace{(\complement A \cup C) \cap (A \cup B)}_{= \text{ d'après i) } \complement A \cap B \cap \complement C} \cup \underbrace{\complement(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{= \; \complement A \cap C \cap \complement B}$$

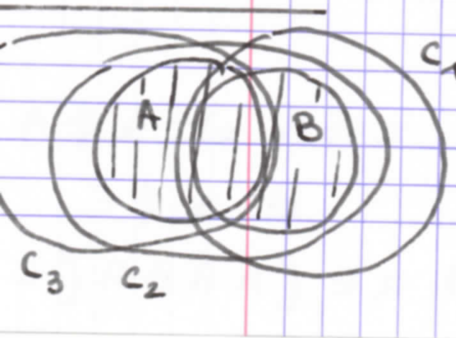
$$= (\complement A \cap B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap C \cap \complement B)$$

$$= \complement A \cup (\underbrace{B \cap \complement C \cup C \cap \complement B}_{B \Delta C})$$

Exercice 10.

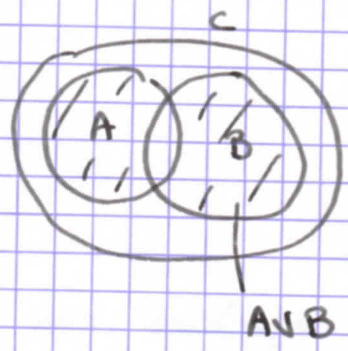
Me consulter si questions.

Exercice 11.



D'après le dessin, on voit que $A \cup B \subsetneq C$ dès que $A \subsetneq C$ ou $B \subsetneq C$.

On va donc prouver
$$(A\cup B) \subsetneq C \Rightarrow (A \subsetneq C) \text{ ou } (B \subsetneq C)$$
Il revient au même de prouver la contre-apposée :
$$\underbrace{\neg(A \subsetneq C \text{ ou } B \subsetneq C)}_{(A \subseteq C \text{ et } B \subseteq C)} \Rightarrow \neg(A\cup B \subsetneq C)$$
$$(A \subseteq C \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A\cup B \subseteq C$$
Ce qui est évident (ou peut être prouvé aisément).



Exercice 15.

i) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$(n,m) \mapsto nm$

- Cette application n'est clairement pas injective car par exemple
$6 \in \mathbb{N} = f(2,3) = f(3,2)$
ou encore pire :
$12 \in \mathbb{N} = f(6,2) = f(4,3)$

- Par contre elle est surjective, en effet :
$\forall n \in \mathbb{N}$:
$n = f(n,1)$.

ii) On considère maintenant :
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n^2+1$

Montrons que cette application est injective :
Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tq $f(n) = f(m)$, ie :

$n^2 + 1 = m^2 + 1$ a-t-on $n = m$?

$\Downarrow$

$n^2 = m^2$

$\Rightarrow n = m$ car $n, m \geqslant 0$.

Par contre, elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

Exercice 16.

Soit
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

- cette application n'est pas injective car
$$f(3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 = f(2).$$
- en revanche, elle est surjective, car $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut lui fabriquer un antécédent, par exemple : $x = 2n$. En effet :
$$f(2n) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n.$$

Exercice 17.

Soit
$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$$
$$A \mapsto \begin{cases} A - \{a\} & \text{si } a \in A \\ A \cup \{a\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$a \in A$ donné.

Pour montrer que cette application est bijective, on peut soit prouver qu'elle est

injective et surjective

en supposant $f(A) = f(B)$ et distinguant le cas $a \in A$ ou $a \notin A$ ...

car $A = \begin{cases} f(A - \{a\}) & \text{si } a \in A \\ f(A \cup \{a\}) & \text{sinon} \end{cases}$

Soit, on peut trouver directement une application inverse. Puisqu'elle existe, c'est que f est bijective.
Pour cela, on vérifie que

$$f \circ f = Id$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

* Si $a \in A$:

$$f(A) = A - \{a\} \leftarrow \text{ et } a \notin A - \{a\}$$

puis $f(f(A)) = (A - \{a\}) \cup \{a\} = A$.

* Si $a \notin A$: idem.

Donc $f \circ f = Id$ puis $f = f^{-1}$ et f bijective.

<u>Exercice 18.</u>

- A-t-on $f^{-1}(\complement B) \subseteq \complement(f^{-1}(B))$?

Soit $x \in f^{-1}(\complement B)$ $\qquad x \in \complement(f^{-1}(B))$?

$\Rightarrow f(x) \in \complement B$

$\Rightarrow f(x) \notin B$

Donc x n'est pas antécédent d'un élément de B, puis :

$x \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in \complement f^{-1}(B)$.

- A-t-on $\complement(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\complement B)$?

Soit $x \in \complement(f^{-1}(B))$ $\qquad x \in f^{-1}(\complement B)$?

$\Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$

Donc x n'est pas antécédent d'un élément de B $\rightarrow f(x) \notin B$

$\rightarrow x \in f^{-1}(\complement B)$

D'où
$$f^{-1}(\complement B) = \complement(f^{-1}(B)).$$

Exercice 19.

Soit $B \subseteq F$, montrons que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

- M/q $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(B)$?

Soit $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ $\qquad x \in f^{-1}(B)$?

$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$ $\qquad \Leftrightarrow \boxed{f(x) \in B \text{ ?}}$

$\Rightarrow \exists x' \in f^{-1}(B)$ tq

$f(x) = f(x')$

or comme $x' \in f^{-1}(B)$:

$f(x') \in B$

Puis $f(x) \in B$.

- M/q $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$

Soit $x \in f^{-1}(B)$ $\qquad x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$?

$\rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$ $\qquad \Leftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$

ce qui conclut...

Exercice 20.

Soit $f : E \to F$ et

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$$
$$A \longmapsto f(A) \quad \text{l'image directe de } A \text{ par } f.$$

Montrons f injective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ injective.

<u>Si f injective</u> $\qquad \mathcal{F}$ injective ?

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tq

$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ ie $f(A) = f(B)$ $\qquad A = B$?

Montrons $A \subseteq B$ $\qquad$ ($B \subseteq A$ sera obtenu par symétrie...).

Soit $x \in A$ $\qquad x \in B$?

$f(x) \in f(A) = f(B) \Longrightarrow \exists x' \in B$ tq $f(x') = f(x)$.

Mais comme f est injective, $f(x)$ ne peut avoir qu'un seul antécédent : x ...

Ou alors :

f injective, donc $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$, puis $x \in B$.

Donc on a bien $A \subseteq B$ puis par symétrie $A = B$.

- Si $\mathcal{F}$ injective $\quad f$ injective ?

Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x')$ $\quad x = x'$?

On a : $f(x) = f(x')$

$$\Longrightarrow \underbrace{f(\{x\})}_{\text{car } = \{f(x)\}} = \underbrace{f(\{x'\})}_{\text{car } = \{f(x')\}} \overset{\text{d'où}}{\rightsquigarrow} \mathcal{F}(\{x\}) = \mathcal{F}(\{x'\})$$

or $\mathcal{F}$ injective

$\Downarrow$

$\{x\} = \{x'\}$

puis $x = x'$.