Chapitre 3 bis

NOMBRES COMPLEXES

I. Définitions, généralités

① * déf: $\mathbb{C}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{R}$ et un élément noté i vérifiant $i^2=-1$ et tel que ses lois prolongent celles de $\mathbb{R}$.

Notation

Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent les nombres complexes.

Soit $z\in\mathbb{C}$, il existe un unique $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq

$$z = \underbrace{x}_{\substack{\text{Partie réelle de } z\\ Re(z)}} + i\underbrace{y}_{\substack{\text{Partie imaginaire de } z\\ Im(z)}}$$

* déf: z est un imaginaire pur quand $Re(z)=0$.

$\{\text{imaginaires purs}\} = \mathbb{R}.i$

rem: le sous-ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble usuel...

* déf: soit $z=x+iy$. Le conjugué de z est $\overline{z}=x-iy$

→ Prop: (pour le chapitre suivant)

L'application $\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \overline{z}$ est un automorphisme de corps involutif ($\varphi\circ\varphi = Id$).

rem: pour $z=x+iy$, on a:

$$\boxed{Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}} \qquad \boxed{Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}}$$

et $\begin{cases} z \text{ est réel} \iff z=\overline{z} \\ z \text{ imaginaire pur} \iff z=-\overline{z}\end{cases}$

→ **Prop:**

tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ est inversible et
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$ (à vérifier ... simple).

② **Module**

* **déf:** Soit $z = x + iy$. Le module de z est:
$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}}$$

c'est une sorte de "mesure" de z : voir plus loin.

→ **Prop:**

(i) $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) $|z| = |\bar{z}|$

(iii) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |zz'| = |z||z'|$

(iv) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

dém:

calculer $|z+z'|^2$ ...

* **déf:** on note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ complexes de module 1.

$(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

③ **Argument**

On va définir une interprétation géométrique des nombres complexes :

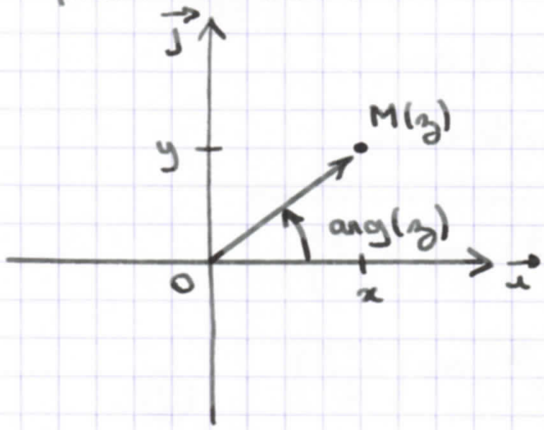
on définit $f : \mathbb{C} \longrightarrow P$ plan affine rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
$$x+iy \longmapsto (x;y)$$

où $(x;y)$ désigne le point M tel que
$$\vec{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

→ **Prop:**

f est une bijection et z s'appelle l'affixe de M

* **déf**: l'argument de z est la mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}(z))$. Il est noté $\arg(z)$ et est défini modulo 2π.

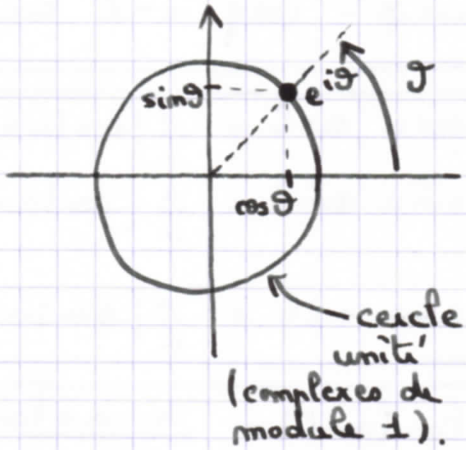


$z = x + iy$

→ Prop: si on pose $\theta = \arg(z)$ (en fait $\dot{\theta} = \arg(z)$: classe modulo 2π)

on a :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



→ Prop:

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$z = |z| . e^{i\theta}$$

où $\theta = \arg(z)$.

→ Prop:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$.

on a $\mathrm{Ker}(f) = 2\pi\mathbb{Z}$.

→ Prop:

(i) Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

on a $z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{et } \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$

(ii) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$

(iii) $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$

II. Trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

(1)

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

(2)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

(3) (linéarisation)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$$

(4)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

(5)

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$
$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

(6)

<u>dém</u> : (il faut retenir leur principe : permet de retrouver les formules).

<u>Groupe ①</u> $\left\{\right.$ $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ sont les parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$ ... on développe.

$$* \quad \underset{\cos(a+b)+i\sin(a+b)}{\overset{\shortparallel}{e^{i(a+b)}}} = e^{ia}\cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i \sin b)$$

$$= \underbrace{\cos a\cos b - \sin a \sin b}_{\cos(a+b)} + i\underbrace{(\cos a \sin b + \cos b \sin a)}_{\sin(a+b)}$$

$$* \quad \cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$
$$= \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a$$
$$= \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

<u>Groupe ②</u> $\left\{\right.$ on utilise $\sin p = \left(\dfrac{e^{ip}-e^{-ip}}{2i}\right)$ et on force la factorisation des "milieux" : $e^{i\frac{p+q}{2}}$

$$* \quad \sin p + \sin q = \frac{e^{ip}-e^{-ip}}{2i} + \frac{e^{iq}-e^{-iq}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{ip}+e^{iq} - (e^{-ip}+e^{-iq})\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\, e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) - e^{-i\frac{p+q}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{p-q}{2}}\right)}_{=}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\underbrace{\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)}_{2\cos\frac{p-q}{2}}\underbrace{\left(e^{i\frac{p+q}{2}} - e^{-i\frac{p+q}{2}}\right)}_{2i\sin\frac{p+q}{2}}\right)$$

$$= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

* idem pour les autres ...

<u>Groupe ③</u> $\left\{\right.$ on combine les formules du groupe ① pour ne garder que certains produits.

$$\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \cancel{\sin a \sin b} \\ + \ \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \cancel{\sin a \sin b} \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) & = & 2\cos a \cos b. \end{array}$$

<u>Groupe ④</u> $\left\{\right.$ on divise les formules du groupe ① et on simplifie.

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$ / haut et bas par $\cos a \cos b$

$$= \frac{\sin a/\cos a + \sin b/\cos b}{1 - \sin a/\cos a \,\sin b/\cos b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Groupe 5 $\{$ on utilise le groupe 1 avec $a = b$.

Groupe 6 $\{$ à partir du groupe 5 avec $a' = a/2$.

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Application:

exprimer $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\tan n\theta$ en fonction de $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$.

ex: $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$
$$= \underbrace{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}_{\cos 3\theta} + i\Big(\underbrace{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}_{\sin 3\theta}\Big)$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Application:

linéarisation de $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ (par exemple, pour intégrer).

ex: $$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)$$
$$= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

→ **Prop:**

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

dém: $$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$ ◇

RETENIR LA METHODE, PAS LA FORMULE : factorisation du "milieu"

ex: calculer $S = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$
$S' = \sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$

$$S + iS' = e^{i0} + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$ (suite géométrique de raison $e^{i\theta}$)

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta} - e^{i0}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\cancel{2i} \sin\frac{n+1}{2}\theta}{\cancel{2i} \sin\theta/2}$$

Puis $S = \cos n\theta \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ et $S' = \sin n\theta \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

III. Equations algébriques

(1) Equation $z^2 = a$ $\quad a \in \mathbb{C}$.

* 1ère méthode :

→ Si $a = 0$: l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

→ Si $a > 0$:

on exprime a sous la forme $a = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$.

On pose $z = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$

$$z^2 = a \iff \rho^2 e^{2i\theta} = re^{i\alpha} \iff \begin{cases} \rho^2 = r \\ 2.\theta = \alpha \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \text{ car } \rho > 0 \\ \theta = \frac{\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases}$$

Donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{r}\, e^{i\frac{\alpha}{2}} ; \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)} = -\sqrt{r}\, e^{i\alpha/2} \right\}.$$

* 2ème méthode :

On pose $a = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ et $z = x + iy$

$$z^2 = a \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = \alpha + i\beta \\ |z|^2 = |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ 2xy = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{2}} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(\beta) \end{cases} \quad (\mathcal{S}).$$

On ne note PAS ces solutions $\sqrt{a}$!

Ça n'a pas de sens !

$\cancel{\sqrt{1+i}}$

② Equation $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c)\in \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$.

$$az^2+bz+c=0 \iff a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\cancel{a}\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}}=0$$

$$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$ et soit $\sqrt{\Delta}$ une des solutions de $z^2=\Delta$.

On a: $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

ex: $(\mathcal{E})$ $z^2+(4-2i)z-i=0$.

$\Delta=16\cancel{+}4-16i+4i=\cancel{20}\,12-12i$

→ recherche de $z^2=20-12i$ $\iff$ $\begin{cases}x^2-y^2=20\\2xy=-12\\x^2+y^2=|20-12i|=\sqrt{544}=\sqrt{2^5.17}=4\sqrt{34}\end{cases}$
$z=x+iy$

a corriger

on pose $\sqrt{\Delta}=\sqrt{10+2\sqrt{34}}+i\sqrt{2\sqrt{34}-10}$ $\iff$ $\begin{cases}x^2=\frac{1}{2}\left(20+4\sqrt{34}\right)=10+2\sqrt{34}\\y^2=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{34}-20\right)=2\sqrt{34}-10\\xy<0\end{cases}$

Solutions:

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{(-4+2i)\pm\sqrt{\Delta}}{2}\right\}$

→ $z=\underset{\pm}{}\sqrt{10+2\sqrt{34}}+i\underset{\pm}{}\sqrt{2\sqrt{34}-10}$

③ Racines nièmes de l'unité

$(\mathcal{E}_n)$ $\boxed{z^n=1}$

On pose $z=\rho e^{i\vartheta}$ et on obtient:

$\mathcal{S}=\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

→ Prop:

Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines nièmes de l'unité.

On a:

$\mathbb{U}_n=Gr(e^{\frac{2i\pi}{n}})$ pour la loi $\times$ de $\mathbb{C}^*$.

et $\mathbb{U}_n=\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ;0\leqslant k\leqslant n-1\}$.

→ Prop:

Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \wedge n = 1$.

dém: on utilise Bezout, car $k \wedge n = 1$...

ex. les racines 3èmes de l'unité:

$\mathbb{U}_3 = \{1 ; \underbrace{e^{\frac{2i\pi}{3}}}_{\text{noté } j} ; e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$ on a : $j^2 = \bar{j}$

$j^3 = 1$

et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

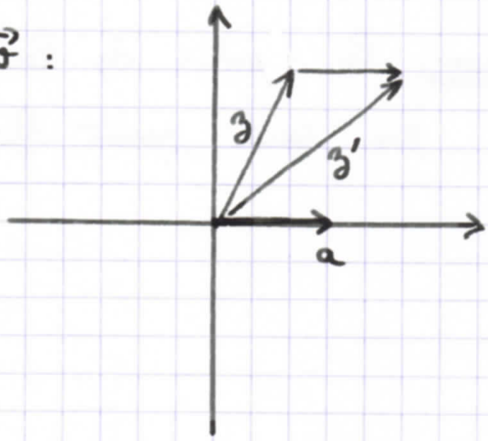
IV. Applications géométriques

① Translations

Soit $\vec{v}$ un vecteur d'affixe $a \in \mathbb{C}$.

Si T est la translation de vecteur $\vec{v}$:

$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$



z : affixe de M

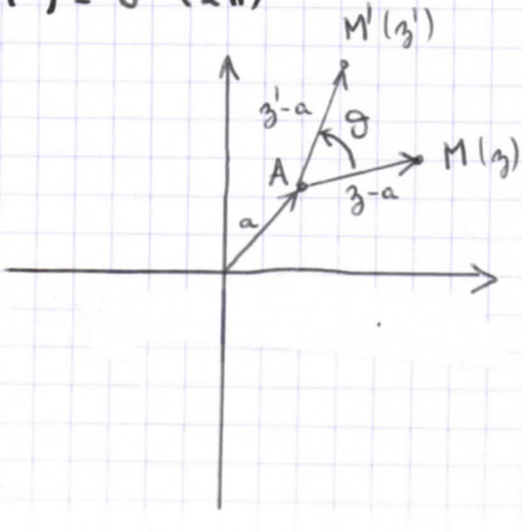
z' : affixe de M'

On a: $\boxed{z' = z + a}$

② Rotation

Soit R la rotation de centre A et d'angle ϑ.

$R(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \vartheta \ (2\pi) \end{cases}$



z : affixe de M

z' : affixe de M'

a : affixe de A

On a: $\boxed{\frac{z'-a}{z-a} = e^{i\vartheta}}$

ie. $\boxed{z' - a = e^{i\vartheta}(z-a)}$

③ Similitudes

Soit S la similitude de centre A, d'angle ϑ et de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$.

$$S(M) = M' \iff \begin{cases} \|\overrightarrow{SM'}\| = k.\|\overrightarrow{SM}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{SM} ; \overrightarrow{SM'}}) = \vartheta \end{cases}$$

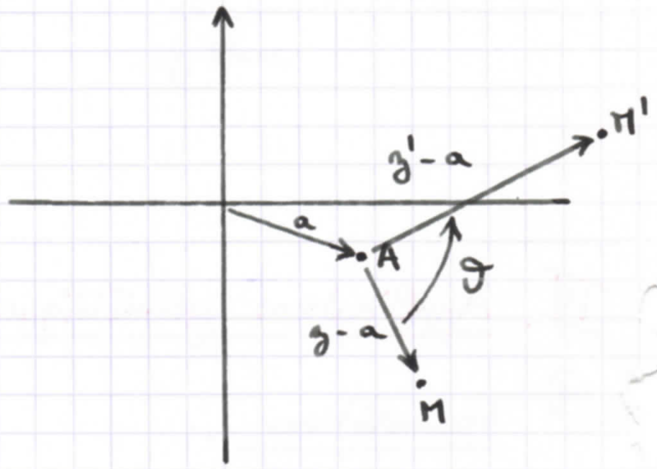
z : affixe de M

z' : affixe de M'

a : affixe de A

On a : $\boxed{\dfrac{z'-a}{z-a} = k.e^{i\vartheta}}$

ie : $\boxed{z'-a = k.e^{i\vartheta}(z-a)}$



rem : le centre de la rotation et de la similitude est son seul point fixe (x point fixe de f si $f(x) = x$).

ESIL - 1ère année
Algèbre

Exercices complémentaires

$\mathbb{C}$

Exercice 1

Soit $v \in \mathbb{C}$ tq $|1+v| \geq 1$. Démontrer que $\forall a \in \mathbb{R}^+$

$$a \geq 1 \Rightarrow |1+av| \geq 1.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ le système suivant $\begin{cases} |z| = 1/|z| \\ |1/z| = |1-z| \end{cases}$

Exercice 3

Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres suivants:

(i) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ (ii) $\dfrac{(2+i)^3+(1-i)^2}{1+i+(2i-1)^2}$

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $|a|<1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$, on pose:
$Z = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Démontrer: (i) $|z| = 1 \Leftrightarrow |Z| = 1$.
(ii) $|z| < 1 \Leftrightarrow |Z| < 1$.

Exercice 5

Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

(i) $z^6+1=0$
(ii) $z^4 = -7-24i$
(iii) $z^3 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$
(iv) $27(z-1)^6+(z+1)^6 = 0$
(v) $z^4 = -119+120i$
(vi) $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$

Exercice 7

Soit $\alpha \in \mathbb{U}-\{-1\}$. Montrer qu'il existe un et un seul $d \in \mathbb{R}$ tq:

$$\alpha = \frac{1+di}{1-di}$$

Exercice 8

Soit (A,B,C) un triangle. On note a, b et c les affixes respectives des points A, B, C.

Démontrer : (A,B,C) triangle équilatéral $\Leftrightarrow$

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + bj^2 + cj = 0$$

Exercice 9

Soient $z_1, \dots, z_n$ n nombres complexes non nuls.

On note $A_1, \dots, A_n$ les points d'affixes $z_1, \dots, z_n$.

Démontrez l'équivalence :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \text{les points } A_k \text{ sont sur une même demi-droite d'origine } O.$$

Solutions partielles

② $\mathcal{S} = \{e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\}$ ⑤ $S_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin \dfrac{n\pi}{3}$

⑥ (i) $\mathcal{S} = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbb{U}$ (ii) $\mathcal{S} = \{\pm(2-i); \pm(1+2i)\}$ (iii) $\mathcal{S} = e^{i\frac{\pi}{12}} \mathbb{U}_3 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} \mathbb{U}_3$

(iv) $\mathcal{S} = \left\{2 \pm i\sqrt{3}; \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$

(v) $\mathcal{S} = \{\pm(2-3i); \pm(3+2i)\}$ (vi) $\mathcal{S} = \left\{i \tan\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right); -n+1 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$