TD 3
Lois de composition internes
Groupes

Polytech Marseille - IRM 1ère année
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement

(***) Exercices de base à préparer impérativement pour le TD.
($\mathfrak{E}$) Exercices d'entraînement pour assimiler les exercices de base.
($\mathfrak{Ch}$) Exercice challenge à cherche en groupe après le TD.

1 Lois de composition internes, groupes

Exercice 1 (***)**.** Etudier la loi :

$$\star \,:\, x, y \;\mapsto\; \mathrm{pgcd}(x, y)$$

dans :

(i) $E_1 = \{n \in \mathbb{N}\,;\, 0 \leq n \leq 10\}$
(ii) $E_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\, 1 \leq n \leq 10\}$
(iii) $E_3 = \{1; 2; 3; 6\}$

Exercice 2 (***)**.** Etudier la loi suivante sur $\mathbb{R}$:

$$a \star b = a + b + ab$$

Exercice 3 (***)**.** Soit E un ensemble, nous allons nous intéresser à différentes lois de composition internes sur $\mathcal{P}(E)$. Pour chacune, déterminer si $(\mathcal{P}(E), \star)$ est un groupe :

(i) Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on pose $A \star B = A \cup B$ (qu'en est-il pour $A \cap B$?)
(ii) Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on pose $A \star B = A \Delta B$.

Exercice 4 ($\mathfrak{E}$)**.** Etudier la loi suivante sur $\mathbb{R}$: $a \star b = \sup(a, b)$. Quelle différence si la loi est définie sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 5 ($\mathfrak{E}$)**.** Vérifier que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est une groupe pour la loi définie par :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

Est-il commutatif ?

Exercice 6 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $\star$, la loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

Etudier cette loi.

Exercice 7 ($\mathfrak{E}$)**.** On munit $\mathbb{R}^+$ de la loi $\star$ définie par :

$$x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Etudier cette loi.

Exercice 8 ($\mathfrak{E}$)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi définie par :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

Etudier cette loi.

Exercice 9 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$ et possédant un élément e vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad ex = x \tag{1}$$

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, \quad xx' = e \tag{2}$$

Et tel que l'opération $\star$ vérifie de plus :

$$\forall x, y, z \in E, \quad (xy)z = (yz)x \tag{3}$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif. Pour cela, à partir des propriétés ci-dessus, on montrera dans l'ordre :

(i) Que pour l'élément x' défini à partir d'un x donné, on a aussi : $x'x = e$ (indication : il faut faire des produits entre des x et des x' ... bon bricolage !)

(ii) Etant donnés $x, y \in E$ et l'élément x' défini à partir de x à l'équation (2), montrer que $(x'x)y = y$ et $(yx')x = y$.

(iii) En déduire que $\star$ est un l.c.i commutative

(iv) Déduire de (iii) que $\star$ est associative

(v) Déduire de (iii) que e est un élément neutre

(vi) Conclure !

Exercice 10 ($\mathfrak{Ch}$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont appelés des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Un élément $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sera noté :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(i) Soient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$ et p_1^{-1}.

(ii) Calculer le cardinal de $\mathcal{S}_n$.

(iii) Montrer que $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe, d'après la question (i), est-il commutatif ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(iv) On appelle permutation circulaire ou cycle, une permutation σ telle que :

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_k) = i_1$$

$$\text{et } \sigma(i) = i \text{ pour } i \neq i_1, \dots, i_k$$

Une telle permutation est alors notée $(i_1, i_2, \dots, i_k)$.
Par exemple sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, le cycle $(2, 5, 3)$ correspond à la permutation :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que la composée de deux cycles disjoints est commutative.

(b) Montrer que p_1 et p_2 peuvent être décomposés en composée de cycles disjoints.

(Bonus) Montrer que toute permutation se décompose en composée de cycles deux à deux disjoints.