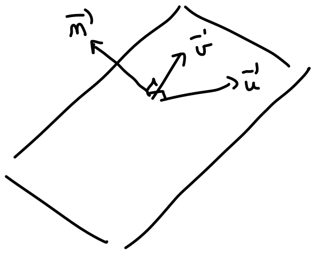
§4. Réduction

Base adaptée $\rightsquigarrow$ $f(e_i)$ / $\{e_i \dots\}$ simple

ex : sym ⊥/ plan $\to \vec{u}, \vec{v}$

$\to \vec{m} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ base : $\mathcal{B}$



$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

ex2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

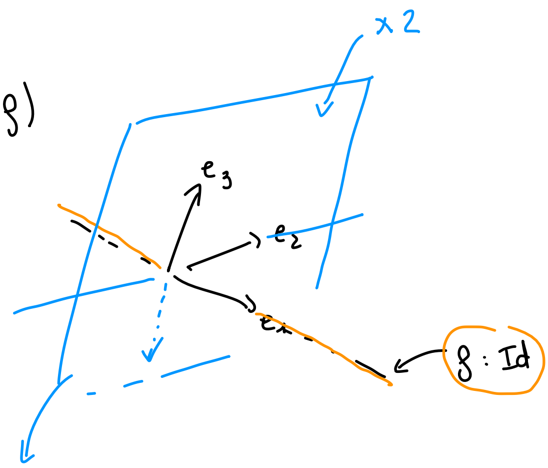
$f(e_2) = \underbrace{2e_2}_{\oplus}$

$f(e_3) = \underbrace{-2e_3}_{\ominus}$

$f(e_1) = e_1$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

géométriquement :



(homothétie $\times 2$) $\circ$ (symétrie / e_2 // e_3)

matrices diagonales

$\Updownarrow$

base adaptées ....

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \longrightarrow \exists \mathcal{B}'$ tq $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ diagonale

base adaptée

interp. géom. immédiate

Réduction

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Vocabulaire :

$\longrightarrow$ f / A diagonalisable si $\exists$ base $\mathcal{B}$ tq $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonale / A devient diagonale

I. Diagonalisation, vecteurs, valeurs propres

Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale

$\mathcal{B} = \{e_1 .. e_n\}$

$$\underbrace{f(\vec{e_i})} = \lambda_i . \underbrace{\vec{e_i}}$$

colinéaires

Matrice diagonale $\Longleftrightarrow$ base $\mathcal{B}$ formée de vects tq
$f(\vec{e_i}) \;//\; \vec{e_i}$

vecteurs propres

* def : $\vec{x} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre de f si :
(resp. $X \neq \vec{0}$ ______ A)

$$f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x} \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \leftarrow \text{colinéaires}$$

(resp. $A \times X = \lambda X$)

valeur propre associée à $X / \vec{x}$

Trouver $\mathcal{B}$ où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres

Prop. Si λ est une valeur propre $\Longrightarrow$ $\exists$ vect. propre associé
↳ $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tq $f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x}$

$\mathcal{E}_\lambda$: ensemble des vect. propres associés à λ

↳ sev de E

$\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id})$) espace propre associé à λ

$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \iff f(\vec{x}) - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$

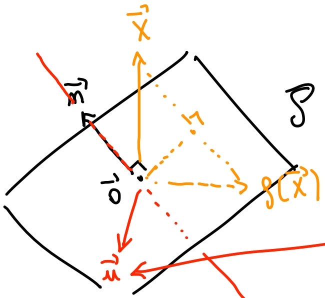
x vect. propre pour λ $\iff f(\vec{x}) - \lambda \cdot Id(\vec{x}) = \vec{0}$ $\qquad Id(\vec{x}) = \vec{x}$

$\iff (f - \lambda \cdot Id)(\vec{x}) = \vec{0}$

$\iff \boxed{\vec{x} \in \ker(f - \lambda\, Id)}$

Vecteurs propres associés à λ $= \ker(f - \lambda \cdot Id)$ → sev de E

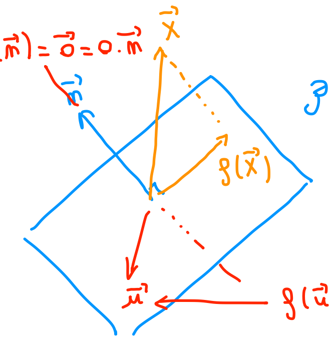
ex: sym. $\perp$ par rapport à $\mathcal{P}$



$f(\vec{u}) = \vec{u} \leadsto \lambda = 1$

$\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = -\vec{X} \leadsto \lambda = -1$

projection $\perp$ par rapport à $\mathcal{P}$



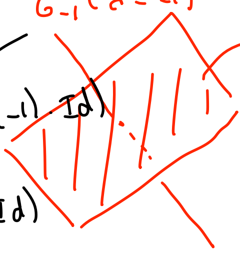
$(\lambda = 0) \leadsto f(\vec{n}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{n}$

$f(\vec{u}) = \vec{u} \leadsto \lambda = 1$

Vecteurs propres :

$\vec{x}$ tq $f(\vec{x}) \parallel \vec{x}$

$\mathcal{E}_{-1}\ (\lambda = -1)$

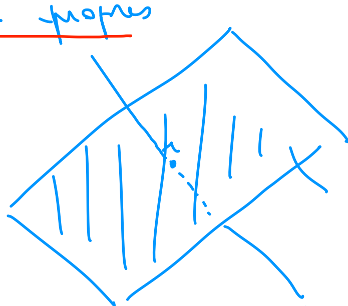


$\ker(f - (-1)\, Id) = \ker(f + Id)$

$\mathcal{E}_1\ (\lambda = 1)$

$\ker(f - 1 \cdot Id) = \ker(f - Id)$

Vecteurs propres



$\mathcal{E}_1\ (\lambda = 1)$

$\mathcal{E}_0\ (\lambda = 0)$

Prop. si λ, λ' sont des valeurs propres distinctes

$\mathcal{E}_\lambda \oplus \mathcal{E}_{\lambda'}$

somme directe (intersection : $\{\vec{0}\}$)

II. Calcul des valeurs / vecteurs propres de f / A

$\boxed{\lambda \text{ valeur propre}}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tq $f(\vec{x}) = \lambda . \vec{x}$

$\Longleftrightarrow$ $\ker(f - \lambda . Id) \neq \{\vec{0}\}$

↳ contient des vecteurs non nuls

$\Longleftrightarrow$ $f - \lambda . Id$ non injective

matrice ds $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ base de E

$\Longleftrightarrow$ $A - \lambda Id$ non inversible

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\det(\underbrace{A - \lambda Id}) = 0}$

↓

polynôme caractéristique de A

* **déf et prop** : si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda . Id)$$

→ polynôme en λ

→ degré n

→ terme de plus haut degré $(-1)^n X^n$

Prop. Les valeurs propres de A (resp. f) sont les racines de $\chi_A(\lambda)$

→ spectre de A : ensemble des valeurs propres $(Sp(A))$

→ multiplicité (algébrique) de $\lambda \in Sp(A)$

↳ sa multiplicité comme racine de $\chi_A(\lambda)$.

ex! $P(X) = (X-2)^{1}(X-1)^{2}(X-3)^{3}$ racines : 1, 2, 3

multiplicité

$P(X) = (X-a)^k . Q(X)$

a racine de mult. k $\Longleftrightarrow$ $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $\vdots$, $P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$

Prop. $\mathcal{E}_\lambda \to$ vecteurs propres associé à la val. propre λ

$(1 \leq)\ \dim(\mathcal{E}_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda)$

si = pour tout $\lambda \in Sp(\lambda)$
alors la matrice / l'application
est diagonalisable.

rem: $A \rightsquigarrow \chi_A(\lambda) = (X-\lambda_1)^{k_1} \times \dots \times (X-\lambda_m)^{k_m}$ dom

$n \times n$

$Sp(A) = \{\lambda_1 \cdots \lambda_m\}$

mult $\downarrow k_1$ $\quad \downarrow k_m$

$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

$\forall i \quad \dim(\mathcal{E}_{\lambda_i}) \leq k_i$

dim n

$E \xrightarrow{?}$ base de vects propres

$\overset{?}{=}\ \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_m}$

$\leq k_1 \quad \leq k_2 \quad \dots \quad \leq k_m \quad$ (et $k_1 + \dots + k_m = n$)

Résumé f/A diagonalisable ? diagonaliser $\to$ déterminer une base où A/f devient diagonale

① $\chi_A(\lambda)$: polynôme caractéristique

② Spectre de A — valeurs propres $\leftarrow$ racines de $\chi_A(\lambda)$

↳ multiplicités

si certaines mult sont > 1

pour chaque λ tq mult$(\lambda) > 1$

vérifier si $\dim(\mathcal{E}_\lambda) = \text{mult}(\lambda)$

si χ_A scindé à n racines distinctes

$\Vert$

toutes les mult sont $= 1$

f/A diagonalisable

$\vec{x} \in \mathcal{E}_\lambda$ - vect. propre pour λ

X

$\Updownarrow$

$(f - \lambda . Id)(\vec{x}) = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$(A - \lambda . I)(X) = \vec{0}$

---

diagonalisable $\;\cancel{\longleftrightarrow}\;$ inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisable $\;\cancel{\longrightarrow}\;$ non inversible

pas de vect. propres pour une rotation

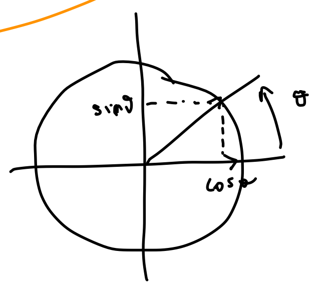
non diagonalisable $\;\cancel{\longleftarrow}\;$ inversible

rotation d'angle $\theta \neq 0/\pi$

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$L_1 \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

det $= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



Prop. $f : E \longrightarrow E$ linéaire

$\operatorname{Ker} f = \mathcal{E}_0$

$\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\vec{x}) = \vec{0} = 0 . \vec{x} \iff \vec{x} \in \mathcal{E}_0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diagonalisable ?}$$

(1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda . I)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad \ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3 \quad = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$-\lambda$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad c_3 \leftarrow c_3 - c_1 \quad = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{dével / ligne}$$

$$= -\lambda . \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1-\lambda-1}$$

$c_2 \leftarrow c_2 + c_1$

$-\lambda$

$$= -\lambda^3$$

$\chi_A(\lambda) \longrightarrow d°3$ ✓

↪ coef dominant $(-1)^3 = -1$ ✓

$Sp(A) = \{0\}$

↓

mult 3

si A diagonalisable

$\Rightarrow$ ⇝ $\exists$ base $\mathcal{B}$

L vects de $\mathcal{E}_0$

⇝ dans cette base A devient

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$ $A = 0$ faux

$\boxed{\begin{array}{l} \dim(\mathcal{E}_0) < 3 \\ \mathcal{E}_0 = \ker f \end{array}}$

↳ par l'absurde : A non diagonalisable ...

$X \in \mathcal{E}_0 \iff (A - 0.I)X = 0 \iff A.X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

3 inconnues
2 éq
1 param $\to z$
$\Downarrow$
dim 1

$y = z$

$x = y - 2z = -z$

$$E_0 = \{(-z, z, z) \,;\, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{\underbrace{(-1, 1, 1)}_{e_1}\}$$

mult = 3 ......

on peut compléter par e_2, e_3 tq

A devient : $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\to$ $\lambda = 0$ mult 3

$A^2, \underline{A^3 = 0}$
$\downarrow$
nilpotente

Prop

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [$\mathbb{C}$] est symétrique [hermitienne] $(A = A^t)$ $(A^* = A)$, $\overline{A^t} = A^*$

alors A est toujours diagonalisable en base orthonormale

on dispose d'un produit scalaire

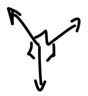
$\underbrace{A}_{\text{diagonalisable}}$ — base $\mathcal{C}$ canonique

$\exists$ base $\mathcal{B}$ où A devient diagonale
$\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$

orthonormale

ortho $\to$ vecteurs $\perp$ les uns aux autres

normale $\to$ vecteurs de norme 1



$$\begin{cases} \forall i \neq j \quad \langle e_i , e_j \rangle = 0 \quad (e_i \perp e_j) \\ \| e_i \| = 1 \end{cases}$$