$$\begin{tikzcd} & E & F \\ f: & \mathcal{B} \arrow[r, dash, "A"'] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "Q"] \\ & \mathcal{C} \arrow[r, dash, "A'"'] & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d, bend left, "P"] & X \\ \vec{X} \in E \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & \mathcal{C} \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

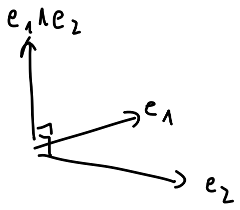
$$X = P X'$$

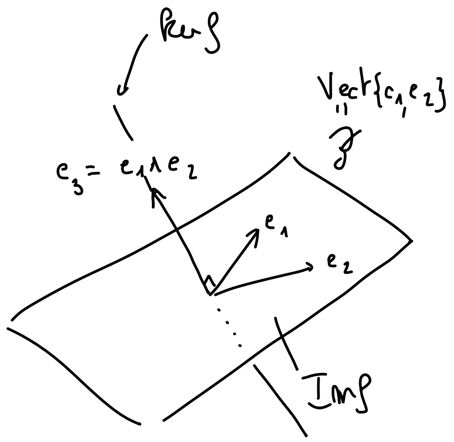
i) $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ici $e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$e_1 \wedge e_2 = e_3$

$\downarrow$

$\perp e_1, e_2$





projection $\perp$

symétrie $\perp$

ii) $$\mathcal{M}_{\underbrace{\{e_1,e_2,e_3\}}_{\mathcal{B}}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0/-1\end{pmatrix} & \begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}\end{array} = A$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ e_1 & e_2 & \vec{0} \mid -\vec{e_3} \end{matrix}$$

base : $\mathcal{B}$

$\underline{\text{Im} f}$ $\quad \text{Vect}\{\underbrace{f(e_1), f(e_2), f(e_3)}\}$ $\longrightarrow$ rang ?

génératrice $\rightarrow$ Im f

th. rang $\updownarrow$ $\quad \underline{\underline{\text{dim}}}$

Im f = $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = \boxed{e_1} \\ f(e_2) = \boxed{e_2} \\ f(e_3) = \vec{0} \;-\; \vec{e_3} \end{array}\right\} \text{rang} = \underline{\underline{2}} \;\; 3$$

$\hookrightarrow$ Im f = Vect{ $\overset{\text{plan}}{f(e_1) = e_1}$, $f(e_2) = e_2$ }

Ker f Résoudre $f(\vec{x}) = \vec{0}$

th. rang $\swarrow$

$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

$\boxed{\operatorname{Ker} f \ : \ \text{droite}}$

$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$

or $f(e_3) = \vec{0} \Rightarrow \underline{e_3 \in \operatorname{Ker} f - \dim 1}$

$\Downarrow$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{e_3\}$

iii)

$$\begin{tikzcd}
f : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\
\mathcal{B} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "Q = P"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "A'"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P$

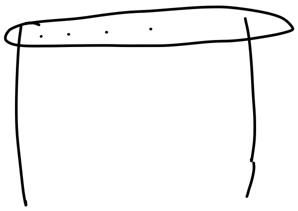
$A' = P^{-1} \times A \times P$

P^{-1} : $\boxed{P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}}$ facile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1}$$

$= P^{-1}$

P : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} =$



$u_n \longrightarrow$ coût $n \times n$

$u_n = n \times u_{n-1} \Big) \longrightarrow u_n = n!$

$$\xcancel{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{com}\, A}$$

$\searrow$ $n^2 \times \det(n-1 \times n-1)$

$\downarrow$

2×2

$$\begin{tikzcd}
A - n \times n \arrow[r, "\text{matrices}", "\text{denses}"'] \arrow[dr, "\text{matrices creuses}"'] & \text{tableau } n \times n \\
& \text{autres impl.} \arrow[d] \\
& \text{implémentations matrices creuses}
\end{tikzcd}$$

Biblio
EIGEN

Matrices creuses:
https://4m053.pages.math.cnrs.fr/tps/sparse/format/

§ 3. Déterminant

$\boxed{f : E \longrightarrow E}$ — $\boxed{A : n \times n}$

Matrice ⟶ inversible !

A^{-1} peut ne pas exister

↕

f^{-1} n'existe pas — f pas bijective.

↓

déterminant : outil pour caractériser

- l'inversibilité de A
- et $f(e_1) \dots f(e_n)$ libres

A ↕ f

inversibles

|

f bijective

$\mathrm{Im} f = f(E) = E$ – dim n

↓ $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$ base de E

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1) \dots f(e_n)\}$

$f(e_1) \dots f(e_n)$ — libres

— rang n

(*)

I. Définition

* déf : déterminant de n vecteurs ds E de dim n

$\det(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \in \mathbb{K}$ ($= 0$ si vects. liés ; $\neq 0$ sinon

(*)

$\det : \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ args}} \longrightarrow \mathbb{K}$ est l'unique application tq :

dét : forme $\overbrace{n\text{. linéaire}}^{1)}$ $\overbrace{\text{alternée}}^{2)}$

1) det linéaire / chacun de ses n arguments

$$\det(\vec{u}_1 \dots, \lambda_1 \vec{u}_i + \lambda_2 \vec{u}'_i, \dots, \vec{u}_n) =$$

$$\lambda_1 . \det(u_1 \dots u_i \dots u_n) + \lambda_2 \det(u_1 \dots u'_i \dots u_n)$$

~~$f(x)$~~

$\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$

2) det alterné :

$\det(u_1 \dots u_n) = 0$ dès que $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ $i \neq j$

det est totalement défini par 1), 2) et $\det \underbrace{(e_1 \dots e_n)}_{\text{base canonique}} = 1$

déf ~~ prop

↓ faire les calculs.

Prop. Soient $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n \in E$

$\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = 0$ ssi $\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n\}$ liés.

* **déf** : A : matrice $n \times n$ ↙ . . . . ↘ f / $\mathcal{B}$

$\det(A)$: déterminant des vecteurs colonnes

↓ images des vects. de $\mathcal{B}$

↓ engendre $\mathrm{Im} f$ ....

II. Propriétés et calcul

Prop. $\det(\underbrace{\vec{u}_1 \dots \overset{\curvearrowright}{\vec{u}_i \dots \vec{u}_j} \dots \vec{u}_n}_{A \text{ matrice}}) = -\det(u_1 \dots \vec{u}_j \dots \vec{u}_i \dots u_n)$

A matrice ←→ inverse colonnes i/j

dém :

$\det(\vec{u}_1 \dots, \overset{i}{\vec{u}_i + \vec{u}_j}, \dots, \overset{j}{\vec{u}_i + \vec{u}_j}, \dots \vec{u}_n) \overset{\text{déf}}{\underset{\text{(alterné)}}{=}} 0$

dét. lin // ième vect

$\det(\vec{u}_1 \dots \overset{i}{\vec{u}_i} \dots \overset{j}{\vec{u}_i + \vec{u}_j} \dots \vec{u}_n)$

$+$

$\det(\vec{u}_1 \quad \vec{u}_j \dots \vec{u}_i + \vec{u}_j \dots \vec{u}_n)$

$\|$ dét lin / jème vec

$\cancel{\det(u_1 \dots u_i \dots u_i \dots u_n)}$ 0

$+$

$\det(u_1 \dots u_i \dots u_j \dots u_n)$

$+$

$\det(u_1 \dots u_j \dots u_i \dots u_n)$

$+$

$\cancel{\det(u_1 \dots u_j \dots u_j \dots u_n)}$ 0

$$\det(u_1 \dots u_i \dots u_j \dots u_n) = -\det(u_1 \dots u_j \dots u_i \dots u_n)$$

◇

Prop 1 (**)

c.l. des autres vects.

$$\det(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) = \det(u_1 \dots, \underbrace{\vec{u}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j . \vec{u}_j}_{i\text{ème vect}}, \dots \vec{u}_n)$$

pivot de Gauss / col. ne change pas le det ⚠

$$u_i \leftarrow u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j . \vec{u}_j$$

coef ≠

$$= \det(u_1 \dots u_i \dots \vec{u}_n) + \sum_{j \neq i} \det(u_1 \dots \underbrace{\lambda_j u_j}_{i} \dots u_j \dots \vec{u}_n)$$

0

rem: $\boxed{\det(\lambda . A) = \lambda^n . \det(A)}$

$\det(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda u_1 & \dots & \lambda u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

⚠ det → linéaire / chaque arg
chaque colonne

Prop 2 (**) Développement par rapport à une colonne j

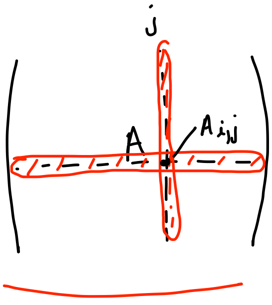
$$\det(\underbrace{u_1 \dots u_n}_{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} . \underbrace{u_{i,j}}_{A_{i,j}} . \det(\text{com } A_{i,j})$$

n×n

n-1 × n-1

$A_{i,j}$ → coef de la col. j

com $A_{i,j}$ →



A privée de ligne i / col j

ex:

dével / col

$$\det \begin{pmatrix} a^{\oplus} & 1^{\ominus} & 3 \\ 0^{\ominus} & 2^{\oplus} & 4 \\ 0^{\oplus} & 5^{\ominus} & 6^{\oplus} \end{pmatrix} = +1 . a \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cancel{|\ \ |} + 0 \cancel{|\ \ |}$$

$(-1)^{i+j}$

$\oplus \to (-1)^{2n}$

dével. col

det de la matrice

$2.6 - 4.5$

$12 - 2e$

$= -a\,8$

Prop

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

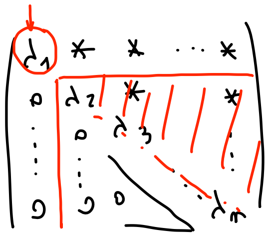
dével / col

Prop

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \times \dots \times d_n$$

(dével / col successives)

ex :



Prop ⊛⊛ (Non triviale)

$$\det(A) = \det({}^tA)$$

Notation

${}^tA$ — A où lignes / col ont été inversées

$${}^tA_{ij} = A_{ji}$$

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

> Donc toutes les prop. précédentes s/ col. sont aussi valables s/ lignes

ex :

$$\begin{vmatrix} ① & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ ① & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_2 \\ \leftarrow \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 2\ell_2 \end{matrix}$$

dével.

$$= 3 \begin{vmatrix} 0^{\oplus} & 7 & 3 & 3 \\ \cancel{-1}^{\ominus} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0^{\oplus} & 6 & 0 & 5 \\ 0^{\ominus} & \cancel{9}\ 3 & \cancel{6}\ 2 & \cancel{3}\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 7^{\oplus} & 3^{\ominus} & 3 \\ 6 & 0^{\oplus} & 5 \\ 3 & 2^{\ominus} & 1 \end{vmatrix} = \left(-3 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right) \cdot 3$$

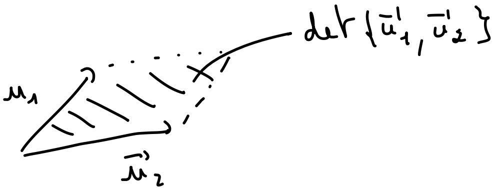
$6 - 15 = -9$

$35 - 18 = 17$

$$= 3 \cdot \left(\underbrace{3.9}_{27} - \underbrace{2.17}_{34} \right) = -21 \neq 0.$$

Note $\det(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ = volume du parallélipipède de base $(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$

ex: ds $\mathbb{R}^2$



ds $\mathbb{R}^3$