§2. Applications linéaires
Matrices

I. Applications linéaires

Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels.

$(E,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ ev $\longrightarrow$ $(E,+)$ groupe
$\longrightarrow$ distrib ....

$(F,\oplus,\odot)$ $\mathbb{K}$ ev $\longrightarrow$ $(F,\oplus)$ groupe
distrib ..

$f : (G,*) \longrightarrow (G',*')$
morphisme de groupes
$f : G \longrightarrow G'$
et
$f(x*y) = f(x) *' f(y)$

f morphisme d'ev : $f : E \longrightarrow F$
" $+ \rightsquigarrow \oplus$ " $\longrightarrow$ $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) \oplus f(\vec{v})$
" $\cdot \rightsquigarrow \odot$ " $\quad f(\lambda\cdot\vec{u}) = \lambda \odot f(\vec{u})$

f commute aux combinaisons linéaires

* **déf** : f est une application linéaire (morphisme d'ev) entre $(E,+,\cdot)$ et $(F,\oplus,\odot)$ $\mathbb{K}$ ev si :

$\forall \vec{u},\vec{v} \in E$
$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$
$$f(\underbrace{\lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}}_{\text{c.l } \vec{u},\vec{v}}) = \lambda \odot f(\vec{u}) \oplus \mu \odot f(\vec{v})$$
optionnel

$\hookrightarrow$ donc c'est un morphisme sur la "partie groupe" de groupe $(E,+) \longrightarrow (F,\oplus)$

ex : $E : (\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ $\qquad F : (\mathbb{R}^5,+,\cdot)$

$f : E \longrightarrow F$ a.l.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} \Bigg/ \underbrace{\begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2z \\ 2x+y \\ y+2z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}}_{f_2 \text{ - linéaire}}$$

c.l. de $x/y/z$, $\mathbb{R}^5$

$$f(X+X') = f(X) + f(X')$$
$$f(\lambda . X) = \lambda . f(X)$$

ex :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto xy$$

non linéaire

$$f(\lambda . X) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda^2 xy \neq \lambda . f(X)$$

$$f(X+X') \neq f(X) + f(X')$$

ex :

$$f : \left(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +, \cdot\right) \longrightarrow \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], +, \cdot\right)$$

matrices 2×2 à coefs ds $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

polynômes à coefs ds $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix} \longmapsto$$

~~$ad - cb$~~ → poly d° 0

f_1 : $\dot{a} + \dot{c}X + \dot{d}X^2 + (\dot{a}+\dot{b}+\dot{c})X^3$

f_2 : $(\dot{a}+\dot{b}) + (\dot{a}+\dot{d})X + (\dot{a}+\dot{b}+\dot{c}+\dot{d})X^5$

coefs $\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\dot{0}$ $\dot{1}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$

f_1, f_2 linéaires.

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X] \longleftarrow \dot{2} + \dot{3}X + \dot{4}X^2 + (\dot{1})X^5$$

coefs $\in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

① Noyau, image

Si $f : (E, +, \cdot) \longrightarrow (F, \oplus, \odot)$ est une appli. linéaire

⤳ en particulier, c'est un morphisme de groupes $(E,+) \to (F,\oplus)$

* **déf** : le <u>noyau</u> de f est celui du morphisme de groupes $(E,+) \longrightarrow (F,\oplus)$

$\oplus \rightsquigarrow \vec{0}_F$

$\ker f = \{ \vec{x} \in E \,;\, f(x) = \vec{0}_F \}$ — c'est un $\boxed{\text{sev de } E}$

$\{ \vec{x} \in E \text{ tq } f(\vec{x}) = \underbrace{e_F}_{\vec{0}_F} \}$

Prop f est injective ssi $\ker f = \{ \underbrace{\vec{0}_E}_{e_E} \}$ (cf. groupes ...)

* **déf** : <u>l'image de f</u> (notée $\mathrm{Im}(f)$) est l'image directe de E par f

$\mathrm{Im} f = f(E) = \{ f(\vec{x}) \,;\, \vec{x} \in E \}$ — c'est un $\boxed{\text{sev de } F}$

<u>Vocabulaire</u> $f : E \longrightarrow F$ appli. linéaire

- $\rightsquigarrow$ isomorphisme $\longleftrightarrow$ f bijective
- $\rightsquigarrow$ endomorphisme $\longleftrightarrow$ $F = E$ $(f : E \longrightarrow E)$

endomorphisme + (bijective) $\downarrow$ automorphisme

ex : $f : \underbrace{(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3}_{\text{dim } 3} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}_{\text{dim } 4}$

$\mathbb{R}^3$ $\qquad \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ ne change rien ..

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 + d \cdot A_4$

base canonique :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A_1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A_2$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A_3$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A_4$

$$f : \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \end{pmatrix}}_{X} \longmapsto \begin{pmatrix} \dot{a} \oplus \dot{b} & \dot{a} \oplus \dot{2}\dot{b} \oplus \dot{4}\dot{c} \\ \dot{2}\dot{a} & \dot{b} \oplus \dot{3}\dot{c} \end{pmatrix}$$

application linéaire

Ker f ?

$$= \left\{ X \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \; ; \; f(X) = \begin{pmatrix} \dot{0} & \dot{0} \\ \dot{0} & \dot{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{0} & \leftarrow \\ \dot{a} \oplus \dot{2}\dot{b} \oplus \dot{4}\dot{c} = \dot{0} & e_2 \leftarrow e_2 - e_1 \overset{-\dot{1} = \dot{4}}{=} e_2 + \dot{4} e_1 \\ \dot{2}\dot{a} = \dot{0} & e_3 \leftarrow e_3 - \dot{2} e_1 \\ \dot{b} \oplus \dot{3}\dot{c} = \dot{0} & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{0} & \\ \dot{b} \oplus \dot{4}\dot{c} = \dot{0} & \leftarrow \\ \underbrace{-\dot{2}}_{\dot{3}}\dot{b} = \dot{0} & e_3 \leftarrow e_3 - \dot{3} e_2 \\ \dot{b} + \dot{3}\dot{c} = \dot{0} & e_4 \leftarrow e_4 - e_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{0} \\ \dot{b} \oplus \dot{4}\dot{c} = \dot{0} \\ \underbrace{-\dot{1}\dot{2}}_{\dot{3}}\dot{c} = \dot{0} \\ \underbrace{-}_{\dot{4}}\dot{c} = \dot{0} \end{cases} \longrightarrow \dot{c} = 0 \quad \dot{b} = \dot{0} \quad \dot{a} = \dot{0}$$

$\text{Ker } f = \{\vec{0}\} \longrightarrow$ f injective

$$f : \overbrace{(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3}^{\text{dim } 3} \longrightarrow \overbrace{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}^{\text{dim } 4}$$

bases à 3 élts $\{e_1, e_2, e_3\}$

Im f ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{a} \oplus \dot{b} & \dot{a} \oplus \dot{2}\dot{b} \oplus \dot{4}\dot{c} \\ \dot{2}\dot{a} & \dot{b} \oplus \dot{3}\dot{c} \end{pmatrix} ; \dot{a}, \dot{b}, \dot{c} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\} \longleftarrow \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$$

$\{f(x) ; \dots\}$ $\subseteq$ (*)

$\supseteq$ simple car $f(e_i) \in \mathrm{Im} f$

sev $\leadsto$ stable par c.l

$\Rightarrow \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \subseteq \mathrm{Im} f$

(*) Si $\boxed{f(X) \in \mathrm{Im} f}$ $\quad f(X) \in \mathrm{Vect}\{f(e_i)\}$?

$=$ c.l. des $f(e_i)$?

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base de E

$X = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2 + \nu \cdot e_3$

$\Rightarrow f(X) \underset{f \text{ lin.}}{=} \lambda \cdot f(e_1) + \mu \cdot f(e_2) + \nu \cdot f(e_3) \in \mathrm{Vect}\{f(e_i)\}$ ✓

Prop.

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_i)\}}$$

⚠ pas forcément libre !

$\{e_1, e_2 \dots\}$ base E $\longrightarrow$ $\{f(e_i)\}$ famille génératrice de $\mathrm{Im} f$

ex :

$$E = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Im} f = \{\overbrace{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; x \in \mathbb{R}}^{\text{droite}}\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

prop. préc.

$f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})$ $\xrightarrow{\text{engendre}}$ $\mathrm{Im} f$

$f(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{\jmath}) = \vec{0}$, $f(\vec{k}) = \vec{0}$

Théorème du rang (***)

$f : E \longrightarrow F$ linéaire

$\dim E = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

petit

$\{\vec{0}\}$

f injective

bijective si on se restreint à $\cancel{F}$ $\mathrm{Im} f$

grossit

f non inj

$\vec{x}$

$\vec{y}$

$\mathrm{Im} f$ "diminue"

II. Matrices

Application linéaire $\longleftrightarrow$ Matrice

appli. f linéaire

expression dans une base (adaptée)

$f : E \longrightarrow E$

$\mathcal{B}$: base de $E = \{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$

$f(\vec{x})$ $\quad$ $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e}_i}$$

$$f(\vec{x}) = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n)$$

$$\boxed{f(\vec{x}) \overset{f \text{ lin}}{=} \alpha_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\vec{e}_n)}$$

$\boxed{\alpha_1 \dots \alpha_n : \text{coords du } \vec{x}}$

... suffit pour reconstruire f entière ....

Information : $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ base de E

$\boxed{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)}$ ⟶ contient tout l'info de f

$\boxed{\text{matrice de } f \text{ dans une base}}$

$\updownarrow$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)\}$$

① Matrice d'une application

E, F deux $\mathbb{K}$ev dim. finie

E : dim n, F : dim m

$$f : \underset{e_i}{E} \longrightarrow \underset{f(e_i)}{F} \quad \text{linéaire}$$

complètement déterminée par les images des vects. d'une base de E

$\mathcal{B}$: base de E
$= \{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$

$\mathcal{B}'$: base de F
$= \{\vec{e}\,'_1 \dots \vec{e}\,'_m\}$

$$f \;\updownarrow\; \underbrace{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)}$$

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

$\downarrow$

$f(\vec{x}) = \alpha_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n \cdot f(\vec{e}_n)$

$f(\vec{e}_i) \in F$ ⌒ dim m

$\downarrow$

m coords ds $\mathcal{B}'$

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$\overset{\dim n}{E} \quad \overset{\dim m}{F}$$

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \Big(\;\; \Big) \Big\} \; m \text{ coords ds } \mathcal{B}'$$

$m \times n$

$f(e_1)$ $f(e_2)$ ....

m coords

ex :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

base

$$\mathcal{B} : \left\{ \underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

base

$$\mathcal{B}' : \left\{ \underset{\vec{e}\,'_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}\,'_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}\,'_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notation pour les endomorphismes

$$f : E \longrightarrow E$$

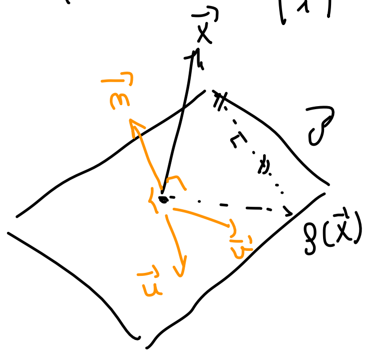
En général on prend la même base "au départ" et à "l'arrivée"

↳ $M_{\mathcal{B}}(f)$.

ex : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ → symétrie ortho / plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\qquad \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ | $\mathcal{C}$: base canonique ...



$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}\,\mathcal{B}'$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ $\qquad f(\vec{v}) = \vec{v}$ $\qquad f(\vec{n}) = -\vec{n}$

$\vec{v} = 0.\vec{u} + 1.\vec{v} + 0.\vec{n}$

coords de $\vec{u}$ ds $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$

$\vec{u} = 1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{n}$

?

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \longrightarrow M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$

comment calculer l'une / l'autre

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{C}$$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ $\qquad f(\vec{v}) = \vec{v}$ $\qquad f(\vec{n}) = -\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcul matriciel

- Opérations s/ appli. linéaire ⟷ Opérations s/ matrices

Changement de base

- matrice de passage
- formule de changement de base

$f + g \longrightarrow A + B$

$\lambda . f \longrightarrow \lambda . A$

$f \circ g \longrightarrow A \times B$

2) Calcul matriciel

Op s/ fonctions linéaires ⟷ Op. s/ matrices

* Somme

* Produit par un scalaire

$f : E \longrightarrow F \quad\longrightarrow\quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ — $n \times m$

$g : E \longrightarrow F \quad\longrightarrow\quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$

$\underset{\lambda . f}{f+g} : \underbrace{E}_{\text{base } \mathcal{B}} \longrightarrow \underbrace{F}_{\text{base } \mathcal{B}'} \quad\longrightarrow\quad C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)$

$\overset{\text{déf}}{=} A+B$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \left(\cdots \bullet \cdots \right) \end{array}$$

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda . f)$

$\overset{\text{déf}}{=} \lambda . A$

$$(\lambda . A)_{i,j} = \lambda . (A_{i,j})$$

* Produit

$f : \underset{\text{dim } m}{E^{\mathcal{B}}} \longrightarrow \underset{\text{dim } n}{F^{\mathcal{B}'}} \quad\longrightarrow\quad A = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \; : \; n \times m$

$g : F \longrightarrow \underset{\text{dim } p}{G^{\mathcal{B}''}} \quad\longrightarrow\quad B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \; : \; p \times n$

$g \circ f : \underset{\mathcal{B}}{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}''}{G} \quad\longrightarrow\quad M = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) \; : \; \underbrace{p}_{i : 1 \to p} \times \underbrace{m}_{j : 1 \to m}$

$= B \times A$

$$(B \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{\underset{1 \to p}{i},\underset{1 \to n}{k}} \times A_{k,j}$$

Sur les matrices, on a 3 opérations

$A+B$, $\overset{\mathbb{K} \,.\, \text{matrice}}{\underbrace{\lambda . A}_{\text{l.c.e}}}$, $A \times B$

lci

$(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}), +)$ groupe commut.

$(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), +, \times)$ anneau

$(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ ev

3) Changement de base

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad ? \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$$

Comment exprimer une base $\mathcal{B}$ par rapport à une autre ($\mathcal{C}$).

encodé par une matrice : $\boxed{\text{matrice de changement de base}}$

a) Matrice de changement de base

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: deux bases de E

$\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ $\quad$ $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$:

nouvelle base

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \\ v_1 & v_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \Big\} \mathcal{B} - \text{ancienne}$$

ancienne base

$\underbrace{v_1 \quad v_2 \quad \dots}_{\mathcal{C}}$ — nouvelle

nouvelle en fct de l'ancienne.

ex : $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{C}$: base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \mathcal{B} \\ \underbrace{\vec{\imath} \quad \vec{\jmath} \quad \vec{k}}_{\mathcal{C}} & \end{array} = P^{-1}$$

$$P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \mathcal{C} \\ \underbrace{\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}}_{\mathcal{B}} & \end{array}$$

... / ...

Prop. i) Une matrice de passage est inversible

ii) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$ — sym / x

Inversion

$$\left(\begin{array}{c|c} P & Id \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} Id & P^{-1} \end{array}\right)$$

pivot de Gauss complet pour amener $P \longrightarrow Id$

c) Formules de changement de base

Changement de base pour les vecteurs

$\vec{x} \in E$: base $\mathcal{B}$, base $\mathcal{C}$; $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Coords de $\vec{x}$ ds $\mathcal{B}$: X

Coords de $\vec{x}$ ds $\mathcal{C}$: X'

$$\boxed{X = P \cdot X'}$$

$$X' = P^{-1} \times X$$

Changement de base pour les matrices

appli. lin.

$$\begin{tikzcd}
f : E \arrow[r] & F \\
\mathcal{B} \arrow[r, "A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)"] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "Q = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "A' = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)"'] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{A' = Q^{-1} \times A \times P}$$

4) Lien matrices / applications linéaires

Application linéaire	Matrices
$f : E \longrightarrow F$ (dim n, dim m) ; bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$	$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$: $m \times n$
$\vec{x} \longrightarrow f(\vec{x})$?	$A \times X$?
coords ds $\mathcal{B}$: X (vect. colonne)	
$A \times X$ ds $\mathcal{B}$	

ex : f : symétrie / $\mathcal{P}$.

$\mathcal{B} : \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) \ ? \ \text{——} \ A'$$

$$\begin{tikzcd}
f : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\
\mathcal{B} \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$$A' = Q^{-1} \times A \times P = \underbrace{P^{-1}}_{?} \times A \times \underbrace{P}_{?}$$

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}} \ \mathcal{B}$$

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \ \mathcal{C} \\ \underbrace{\begin{matrix} \vec{u}' & \vec{v}' & \vec{n}' \end{matrix}}_{\mathcal{B}} & \end{array} = Z$$

✓

Z^{-1} ?

$^{-1}$

Inversion de Z :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ e_3 \leftarrow e_3 - e_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad e_3 \leftarrow e_3 - e_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} e_1 \leftarrow 3e_1 + e_3 \\ e_2 \leftarrow 3e_2 + e_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \times 1/3 \\ \times 1/3 \\ \times 1/3 \end{array}$$

$$P = Z^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}}_{A'}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

$$=$$

$$A' \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$