§2. Applications linéaires
Matrices

I. Applications linéaires

Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels.

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ ev $\longrightarrow$ $(E, +)$ groupe
$\longrightarrow$ distrib ....

$(F, \oplus, \odot)$ $\mathbb{K}$ev $\longrightarrow$ $(F, \oplus)$ groupe
distrib ..

$f : (G, *) \longrightarrow (G', *')$
morphisme de groupes
$f : G \longrightarrow G'$
et
$f(x * y) = f(x) *' f(y)$

f morphisme d'ev : $f : E \longrightarrow F$

" $+ \rightsquigarrow \oplus$ " $\longrightarrow$ $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) \oplus f(\vec{v})$

" $\cdot \rightsquigarrow \odot$ " $\qquad$ $f(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \odot f(\vec{u})$

f commute aux combinaisons linéaires

* **déf** : f est une application linéaire (morphisme d'ev) entre $(E, +, \cdot)$ et $(F, \oplus, \odot)$ si :
$\mathbb{K}$ev

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

optionnel

$$f(\underbrace{\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}_{\text{c.l. } \vec{u}, \vec{v}}) = \lambda \odot f(\vec{u}) \oplus \mu \odot f(\vec{v})$$

$\hookrightarrow$ donc c'est un morphisme sur la "partie groupe" de groupe $(E, +) \longrightarrow (F, \oplus)$

ex : $E : (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\qquad$ $F : (\mathbb{R}^5, +, \cdot)$

$f : E \longrightarrow F$ a.l.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} \Bigg/ \underbrace{\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2z \\ 2x + y \\ y + 2z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}}_{f_2 \text{ - linéaire}}$$

c.l. de $x / y / z$, $\mathbb{R}^5$

$f(X+X') = f(X)+f(X')$
$f(\lambda . X) = \lambda . f(X)$

<u>ex</u> :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto xy$$

non linéaire

$$f(\lambda . X) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda^2 xy \neq \lambda . f(X)$$

$$f(X+X') \neq f(X) + f(X')$$

<u>ex</u> :

$$f : \left(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +, \cdot\right) \longrightarrow \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], +, \cdot\right)$$

matrices 2x2 à coefs ds $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

polynômes à coefs ds $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix} \longmapsto$$

$\cancel{\dot{a}\dot{d} - \dot{c}\dot{b}}$ → poly d° 0

f_1 $\quad \underline{\dot{a} + \dot{c}}X + \dot{d}X^2 + (\dot{a}+\dot{b}+\dot{c})X^3$

f_2 $\quad (\dot{a}+\dot{b}) + (\dot{a}+\dot{d})X + (\dot{a}+\dot{b}+\dot{c}+\dot{d})X^5$

coefs $\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\dot{0}$ $\quad \dot{1}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$

f_1, f_2 linéaires.

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X] \longleftarrow \dot{2} + \dot{3}X + \dot{4}X^2 + (\dot{1})X^5$$

coefs $\in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

① <u>Noyau, image</u>

Si $f : (E, +, \cdot) \longrightarrow (F, \oplus, \odot)$ est une appli. linéaire

→ en particulier, c'est un morphisme de groupes $(E,+) \to (F, \oplus)$

$\ast$ <u>déf</u>: le <u>noyau</u> de f est celui du morphisme de groupes $(E,+) \longrightarrow (F, \oplus)$

$\vec{O}_F$

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in E \,;\, f(x) = \vec{O}_F\}$$ — c'est un $\boxed{\text{sev de } E}$

$\{\vec{x} \in E \text{ tq } f(\vec{x}) = \underbrace{e_F}_{\vec{0}_F}\}$

<u>Prop</u> f est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{\underbrace{\vec{O}_E}_{e_E}\}$ (cf. groupes ...)

$\ast$ <u>déf</u>: <u>l'image de f</u> (notée $\operatorname{Im}(f)$) est l'image directe de E par f

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(\vec{x}) \,;\, \vec{x} \in E\}$$ — c'est un $\boxed{\text{sev de } F}$

<u>Vocabulaire</u> $f : E \longrightarrow F$ appli. linéaire

- $\rightsquigarrow$ isomorphisme $\longleftrightarrow$ f bijective
- $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\text{endomorphisme}}_{\substack{+\\ \downarrow \\ \text{automorphisme}}}$ $\longleftrightarrow$ $F = E$ $(f : E \longrightarrow \underline{\underline{E}})$

<u>ex</u>: $f : \overbrace{(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}^{\text{dim } 3}{}^3 \longrightarrow \overbrace{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}^{\text{dim } 4}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ ne change rien ..

$\mathbb{R}^3$

$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{base canonique}]{}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A_1$

$= a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 + d \cdot A_4$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A_2$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A_3$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A_4$

$$f : \underbrace{\begin{pmatrix} \dot a \\ \dot b \\ \dot c \end{pmatrix}}_{X} \longmapsto \begin{pmatrix} \dot a \oplus \dot b & \dot a \oplus \dot 2 \dot b \oplus \dot 4 \dot c \\ \dot 2 \dot a & \dot b \oplus \dot 3 \dot c \end{pmatrix}$$

application linéaire

Ker f ?

$$= \left\{ X \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \; ; \; f(X) = \begin{pmatrix} \dot 0 & \dot 0 \\ \dot 0 & \dot 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff \begin{cases} \dot a \oplus \dot b = \dot 0 \\ \dot a \oplus \dot 2 \dot b \oplus \dot 4 \dot c = \dot 0 & e_2 \leftarrow e_2 - e_1 \overset{-\dot 1 = \dot 4}{=} e_2 + \dot 4 e_1 \\ \dot 2 \dot a = \dot 0 & e_3 \leftarrow e_3 - \dot 2 e_1 \\ \dot b \oplus \dot 3 \dot c = \dot 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot a \oplus \dot b = \dot 0 \\ \dot b \oplus \dot 4 \dot c = \dot 0 \\ \underbrace{-\dot 2}_{\dot 3} \dot b = \dot 0 & e_3 \leftarrow e_3 - \dot 3 e_2 \\ \dot b + \dot 3 \dot c = \dot 0 & e_4 \leftarrow e_4 - e_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot a \oplus \dot b = \dot 0 \\ \dot b \oplus \dot 4 \dot c = \dot 0 \\ \underbrace{-\dot{12}}_{\dot 3} \dot c = \dot 0 \\ \underbrace{-}_{\dot 4} \dot c = \dot 0 \end{cases} \longrightarrow \dot c = 0, \quad \dot b = \dot 0, \quad \dot a = \dot 0$$

$$\text{Ker } f = \{\vec 0\} \longrightarrow f \text{ injective}$$

$$f : \overset{\text{dim } 3}{(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3} \longrightarrow \overset{\text{dim } 4}{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}$$

bases à 3 élts $\{e_1, e_2, e_3\}$

Im f ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot a \oplus \dot b & \dot a \oplus \dot 2 \dot b \oplus \dot 4 \dot c \\ \dot 2 \dot a & \dot b \oplus \dot 3 \dot c \end{pmatrix} \; ; \; \dot a, \dot b, \dot c \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\} \longleftarrow \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$$

$$\{f(x) ; \dots\} \qquad \subseteq \quad (*)$$

$\supseteq$ simple car $f(e_i) \in \mathrm{Im} f$

sev ⇝ stable par c.l

$$\Rightarrow \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \subseteq \mathrm{Im} f$$

(*) Si $\boxed{f(X) \in \mathrm{Im} f}$ $\qquad f(X) \in \mathrm{Vect}\{f(e_i)\}$?

= c.l. des $f(e_i)$?

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base de E

$$X = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2 + \nu \cdot e_3$$

$$\Rightarrow f(X) \underset{f \text{ lin.}}{=} \lambda \cdot f(e_1) + \mu \cdot f(e_2) + \nu \cdot f(e_3) \in \mathrm{Vect}\{f(e_i)\} \quad ✓$$

Prop.

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_i)\}}$$

⚠ pas forcément libre !

$\{e_1, e_2 \dots\}$ base E $\longrightarrow$ $\{f(e_i)\}$ famille génératrice de $\mathrm{Im} f$

ex :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Im} f = \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; x \in \mathbb{R} \right\}}^{\text{droite}} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

prop. préc.

$\{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\}$ engendre $\mathrm{Im} f$

$f(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad f(\vec{j}) = \vec{0}$, $\quad f(\vec{k}) = \vec{0}$

Théorème du rang (***)

$f : E \longrightarrow F$ linéaire

$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

petit

$\{\vec{0}\}$

f injective

bijective si on se restreint à F $\operatorname{Im} f$

grossit

f non inj

$\vec{x}$

$\vec{y}$

$\operatorname{Im} f$ "diminue"

II. Matrices

Application linéaire $\longleftrightarrow$ Matrice

appli. f linéaire

expression dans une base (adaptée)

$f : E \longrightarrow E$

$\mathcal{B}$: base de E $= \{\vec{e}_1 .. \vec{e}_n\}$

$f(\vec{x})$ $\quad$ $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e}_i$$

$$f(\vec{x}) = f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n)$$

$$\boxed{f(\vec{x}) \overset{f \text{ lin}}{=} \lambda_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{e}_n)}$$

$\boxed{\lambda_1 \dots \lambda_n : \text{coords du } \vec{x}}$

... suffit pour reconstruire f entière ....

Information : $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ base de E

$\boxed{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)}$ → contient tout l'info de f

$\boxed{\text{matrice de } f \text{ dans une base}}$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)\}$$

① Matrice d'une application

E, F deux Kev dim. finie

E : dim n ; F : dim m

$$f : \underset{e_i}{E} \longrightarrow \underset{f(e_i)}{F} \quad \text{linéaire}$$

complètement déterminée par les images des vects. d'une base de E

$\mathcal{B}$: base de E
$= \{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$

$$f \longleftrightarrow \underbrace{f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)}$$

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$

$f(\vec{x}) = \lambda_1 . f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda . f(\vec{e}_n)$

$\mathcal{B}'$: base de F
$= \{\vec{e}\,'_1 \dots \vec{e}\,'_m\}$

$f(\vec{e}_i) \in F$ dim m

m coords ds $\mathcal{B}'$

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$\underset{\dim n}{f : E} \longrightarrow \underset{\dim m}{F}$$

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{m \times n} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \vert & \vert & \\ \vert & \vert & \\ \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{f(e_1)}_{m \text{ coords}} & f(e_2) & \dots \end{array} \end{array} \Big\} \; m \text{ coords ds } \mathcal{B}'$$

ex :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

base

$$\mathcal{B} : \left\{ \underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

base

$$\mathcal{B}' : \left\{ \underset{\vec{e}\,'_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}\,'_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}\,'_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notation pour les endomorphismes

$$f : E \longrightarrow E$$

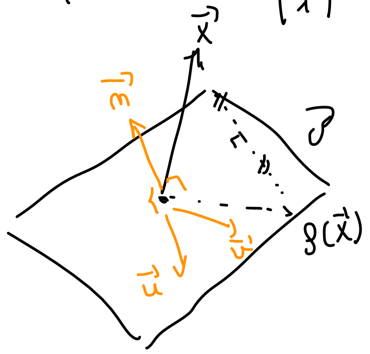
En général on prend la même base "au départ" et à "l'arrivée"

↳ $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

ex : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ → symétrie ortho / plan $P = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\quad \vec{m} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{m}\}$ | $\mathcal{C}$: base canonique ...



$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ $\quad f(\vec{v}) = \vec{v}$ $\quad f(\vec{m}) = -\vec{m}$

$\vec{v} = 0.\vec{u} + 1.\vec{v} + 0.\vec{m}$

coords de $\vec{u}$ ds $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{m}\}$

$\vec{u} = 1.\vec{u} + 0.\vec{v} + 0.\vec{m}$

?

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \longrightarrow M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$

comment calculer l'une / l'autre

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ coords ds } \mathcal{C}$$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ $\quad f(\vec{v}) = \vec{v}$ $\quad f(\vec{m}) = -\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcul matriciel

- Opérations s/ appli. linéaire ⟷ Opérations s/ matrices

Changement de base

- matrice de passage
- formule de changement de base

$f+g \longrightarrow A+B$

$\lambda . f \longrightarrow \lambda . A$

$f \circ g \longrightarrow A \times B$

2) Calcul matriciel

Op s/ fonctions linéaires ⟷ Op. s/ matrices

* Somme

* Produit par un scalaire

$f : E \longrightarrow F$

$g : E \longrightarrow F$

$f+g : \underbrace{E}_{\text{base } \mathcal{B}} \longrightarrow \underbrace{F}_{\text{base } \mathcal{B}'}$

$\alpha . f$

$A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ — $n \times m$

$B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$

$C = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)$

$\overset{\text{déf}}{=} A+B$

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

$D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha . f)$

$\overset{\text{déf}}{=} \alpha . A$

$$(\alpha . A)_{i,j} = \alpha . (A_{i,j})$$

* Produit

$f : \overset{\text{dim } n}{E_{\mathcal{B}}} \longrightarrow \overset{\text{dim } m}{F_{\mathcal{B}'}}$

$g : F \longrightarrow G_{\mathcal{B}''}$ — dim p

$g \circ f : E_{\mathcal{B}} \longrightarrow G_{\mathcal{B}''}$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \; : m \times n$

$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \; : p \times m$

$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) \; : \underbrace{p}_{i : 1 \to p} \times \underbrace{n}_{j : 1 \to n}$

$= B \times A$

$$(B \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} B_{i,k} \times A_{k,j}$$

i,k : $1 \to p$, $1 \to m$

Sur les matrices, on a 3 opérations

$A+B$, $\underbrace{\alpha . A}_{\text{l.c.e}}$ ($\mathbb{K}$. matrice), $A \times B$

l.c.i

$(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}), +)$ groupe commut.

$(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), +, \times)$ anneau

$(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ ev

3) Changement de base

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

? $\quad$ { $\quad$?

$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$

Comment exprimer une base $\mathcal{B}$ par rapport à une autre ($\mathcal{C}$).

encodé par une matrice : $\boxed{\text{matrice de changement de base}}$

a) Matrice de changement de base

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: deux bases de E

$\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ $\quad$ $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$:

nouvelle base

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \\ \underbrace{v_1 \quad v_2 \quad \dots}_{\mathcal{C}} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \Big\} \mathcal{B} \text{ — ancienne}$$

ancienne base

nouvelle

nouvelle en fct de l'ancienne.

ex : $\mathcal{B} = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{C}$: base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \\ \underbrace{\vec{\imath} \quad \vec{\jmath} \quad \vec{k}}_{\mathcal{C}} \end{array} \begin{array}{l} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{m} \end{array} \mathcal{B} \quad = P^{-1}$$

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{m}}_{\mathcal{B}} \end{array} \begin{array}{l} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \mathcal{C} \quad = P$$

... / ...

Prop. i) Une matrice de passage est inversible

ii) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$ sym / x

Inversion

$$\left(\begin{array}{c|c} P & Id \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} Id & P^{-1} \end{array}\right)$$

pivot de Gauss complet pour amener $P \to Id$

c) Formules de changement de base

Changement de base pour les vecteurs

$\vec{x} \in E$: base $\mathcal{B}$, base $\mathcal{C}$, $\quad P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Coords de $\vec{x}$ ds $\mathcal{B}$: X

Coords de $\vec{x}$ ds $\mathcal{C}$: X'

$$\boxed{X = P \cdot X'}$$

$$X' = P^{-1} \times X$$

Changement de base pour les matrices

appli. lin.

$$\begin{tikzcd}
f : E \arrow[r] & F \\
\mathcal{B} \arrow[r, "A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)"] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "Q = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "A' = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)"'] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{A' = Q^{-1} \times A \times P}$$

4) Lien matrices / applications linéaires

Application linéaire	Matrices
$f : E \longrightarrow F$ (dim n → dim m); $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases	$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$: $m \times n$
$\vec{x} \longrightarrow f(\vec{x})$? ; coords ds $\mathcal{B}$: X (vect. colonne) ; $A \times X$ ds $\mathcal{B}$	$A \times X$?