Examen de méthodologie du raisonnement structures algébriques II Polytech Marseille - Informatique 3

Alexandra Bac

4 février 2022

Epreuve de 2h. Documents et calculatrices interdits.

Problème. Dans cet exercice, on se placera dans $\mathbb{R}^4$. On rappelle que les vecteurs u, v sont dits **orthogonaux** si $\langle u, v\rangle = 0$ où $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_4v_4$ (calculé sur les coordonnées dans la base canonique, attention).

Soient les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 0, 1, 0)^t \quad u_2 = (0, 1, 0, 1)^t$$

(les vecteurs sont traditionnellement colonne, d'où la transposée qui permet une réelle économie de papier sur ce sujet :) ne soyez pas surpris).

1. Montrez que ces deux vecteurs sont libres. En déduire la dimension de $\mathrm{Vect}(\{u_1, u_2, u_1 + u_2\})$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension k ($0 \leq k \leq 4$). On définit :

$$F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4\,;\, \forall u \in F \quad \langle u, v\rangle = 0\}$$

donc ce sont les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

   (a) Montrez que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Montrez que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

   (c) Soit $\{v_1, \ldots, v_k\}$ une base **orthonormale** de F (vecteurs de norme 1 et orthogonaux entre eux). On admettra que $u \in F^\perp$ si et seulement si $\langle u, v_j\rangle = 0$ pour $j = 1 \ldots k$.
   Soit $v \in F$. En utilisant la décomposition :

$$v = \left(v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle v_i\right)$$

   montrez que $\mathbb{R}^4 = F + F^\perp$.

   (d) En déduire que $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ puis la dimension de $F^\perp$ en fonction de celle de F ?

   (e) Que valent $\{0\}^\perp$ et $(\mathbb{R}^4)^\perp$?

3. Dans la suite, on prendra $F = \mathrm{Vect}(\{u_1, u_2\})$.

   (a) Si $X \in F^\perp$, écrire les deux équations qu'il vérifie. Montrez que l'on obtient un système linéaire de deux équations à quatre inconnues, puis donnez les solutions de ce système (choisissez correctement les paramètres).

   (b) En déduire que $F^\perp = \mathrm{Vect}(\{u_3, u_4\})$ avec $u_3 = (-1, 0, 1, 0)^t$ et $u_4 = (0, -1, 0, 1)^t$. Est-ce cohérent avec la dimension trouvée plus haut pour $F^\perp$?

   (c) Prouvez que les vecteurs $\{u_1, , u_4\}$ forment une base orthogonale (base dans laquelle tous les vecteurs sont orthogonaux les uns aux autres). Puis que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}u_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}u_4\}$ forment une base orthonormale (base orthogonale dont les vecteurs sont de norme 1).
   On notera $e_i = \frac{1}{\sqrt{2}}u_i$ pour $i = 1 \ldots 4$ et $\mathcal{B}$ la base $\{e_1, \ldots, e_4\}$.

(d) Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.

i. Sans faire de calcul sur les coordonnées mais en raisonnant sur la définition de la matrice de passage et du produit matriciel, montrez que :
$$P^t P = I$$
De telles matrices sont appelées **matrices orthogonales**.

ii. Si Q est une matrice orthogonale, que vaut Q^{-1} (le résultat est évident et permet de calculer les inverses de manière presque gratuite). En déduire P^{-1}.

4. On considère maintenant $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez l'image de f puis son noyau. Cette application est-elle bijective ?

(b) Calculez l'image de $u_1, \ldots, u_4$ par cette application et en déduire le spectre de f, la multiplicité des valeurs propres et les espaces propres associés (reliez à F et $F^{\perp}$).

(c) En déduire la diagonalisation de la matrice puis l'interprétation "géométrique" de f.