TD 3 bis - Déterminants, diagonalisation, vecteurs et valeurs propres

Polytech Marseille - IRM3

Méthodologie du raisonnement et structures algébriques II

1 Diagonalisation, vecteurs et valeurs propres

Exercice 1 (***)**.** Diagonaliser si c'est possible :

$$(i)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\quad A=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$(iii)\quad A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (iv)\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Et si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$?

Exercice 2 (***)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\begin{cases} f(0,0,1) & = (0,0,0) \\ f(1,0,1) & = (1,0,1) \\ f(0,1,1) & = (1,1,2) \end{cases}$$

(i) Pourquoi l'application linéaire est-elle bien définie par ces trois égalités ?

(ii) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

(iii) La matrice est-elle diagonalisable ?

(iv) Déterminez $\ker((f-1\cdot\mathrm{Id})^2)$, quelle relation avec $\mathcal{E}_1$. En déduire un vecteur $e_3 \in \ker((f-1\cdot\mathrm{Id})^2)\backslash\mathcal{E}_1$.

(v) On a $(f-1\cdot\mathrm{Id})^2(e_3)=0$, en déduire à quel espace appartient $(f-1\cdot\mathrm{Id})(e_3)$, puis la valeur de $f(e_3)$.

(vi) En déduire une réduction de A

Exercice 3 ($\mathfrak{C}$)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$. Démontrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ ont mêmes valeurs propres (on pourra considérer par exemple $f\circ g\circ f$).

Exercice 4 ($\mathfrak{C}$)**.** Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de E. Si :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=A$$

(i) Déterminer le rang, l'image et le noyau de f.

(ii) Calculer les puissances successives de A.

(iii) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

Exercice 5 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Si :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 6 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Si :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = A$$

La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Réponses partielles aux exercices d'entraînement

Ex. 4 (i) rang $= 1$ et on trouve un vecteur dans le noyau, (ii) on constate que A est nilpotente, (iii) A a une seule valeur propre (0) mais $\mathcal{E}_0 = \ker(A)$ est de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable.
Ex. 5 La matrice est diagonalisable. $\mathrm{Sp}(A) = \{4, 2\}$ avec $\mathrm{mult}(4) = 2$ et $\mathrm{mult}(2) = 1$. On trouve bien $\mathrm{dimE}_4 = 2$ donc A est diagonalisable.
Ex. 6 On trouve la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c\sqrt{2} \end{pmatrix}$$