# TD 2
# Espaces vectoriels, applications linéaires

Polytech Marseille - IRM3
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement et structures algébriques II

**Exercice 1** (***).
Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 1)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

(i) Montrer que $f$ est une application linéaire.
(ii) Déterminer l'expression de $f$ dans une base adaptée.
(iii) En déduire l'expression anaytique de $f$ dans la base canonique.
(iv) Calculer le noyau, l'image et le rang de $f$.

**Exercice 2** (***). On appelle projecteur de $\mathbb{R}^n$ toute application linéaire $f$ telle que $f^2 = f$. Montrer qu'une telle application est une projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

**Exercice 3** (***). (suite de l'exercice 2).
Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y + z = 0\}$, le vecteur $g = (1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(g)$, le vecteur $k = (1, 2, 1)$ et $K = \mathrm{Vect}(k)$, ainsi que $l_1 = (1, 0, -1)$, $l_2 = (-2, 1, 1)$ et $L = \mathrm{Vect}\{l_1, l_2\}$.

(i) Déterminer une base de $F$ et un système d'équations du sous-espace $L$.
(ii) Montrer que $E = F \oplus G$ et $E = K \oplus L$.
(iii) Soit $p$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$ et $q$ le projecteur sur $K$ parallèlement à $L$ :
  (a) Déterminer les expressions analytiques de $p$ et $q$.
  (b) Montrer que $p \circ q = 0$.
  (c) Soit $r = p + q - q \circ p$ (tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $r$ est un projecteur et que :

$$\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$

  Déterminer l'expression analytique de $r$.

**Exercice 4** (***). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles, et soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions respectivement paires et impaires.

(i) Montrer rapidement que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
(ii) Déterminer $p$ le projecteur sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$.

**Exercice 5** ($\mathfrak{C}$). Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ et $\mathcal{B}$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(i) Soit $f$ définie dans la base $\mathcal{B}$ par $f(e_1) = (1, 1, 2)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$ et $f(e_3) = (1, 0, -2)$. Déterminer analytiquement $f$ (i.e. déterminer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z)$ quelconque).
Déterminer le noyau et l'image de $f$.

(ii) Soit $e'_1 = (1,1,0)$, $e'_2 = (0,1,-1)$ et $e'_3 = (0,0,1)$. Vérifier que $(e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $E$. Soit $g$ définie par $g(e'_1) = e'_1 + e'_2$, $g(e'_2) = 2e'_3$ et $g(e'_3) = e'_2 - e'_1$.
Déterminer analytiquement $g$ ainsi que son noyau et son image.

**Exercice 6** ($\mathfrak{Ch}$)**.** On se place dans $\mathbb{Z}_5^4$ l'espace des vecteurs de dimension 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(i) Montrer que la famille suivante de vecteurs est une base :

$$\begin{cases} u_1 = (\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{0}) \\ u_2 = (\dot{0}, \dot{1}, \dot{0}, \dot{1}) \\ u_3 = (\dot{1}, \dot{0}, \dot{2}, \dot{0}) \\ u_4 = (\dot{0}, \dot{1}, \dot{0}, \dot{2}) \end{cases}$$

(ii) Soit $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} f(u_1) = u_2 \\ f(u_2) = u_1 \\ f(u_3) = (\dot{0}, \dot{0}, \dot{0}, \dot{0}) \\ f(u_4) = (\dot{0}, \dot{0}, \dot{0}, \dot{0}) \end{cases}$$

(a) Déterminer l'expression de $f$ dans la base la plus adaptée, en déduire son expression analytique dans la base canonique.

(b) Calculer le noyau et l'image de $f$ et préciser leurs dimensions (vous utiliserez l'expression de $f$ dans la base qui vous convient le mieux). $f$ est-elle injective ? bijective ?

(bonus) Trouvez deux vecteurs indépendants $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_5^4$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ et en déduire l'expression de $f$ dans cette base. En déduire une "interprétation géométrique" de $f$ (autant qu'on peut le faire en dimension 4 ...)