TD 1
Espaces vectoriels

Polytech Marseille - IRM3
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement et structures algébriques II

Exercice 1 (***). Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à n.

(i) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire classiques est un espaces vectoriel.

(ii) En déterminer une base.

(iii) Quelle est sa dimension ?

(iv) On suppose que $n \geq 3$, quelle est la dimension du sous-espace engendré par $\{(X+1)^2, X, 1+X\}$?

Exercice 2 (***). Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^5$, déterminer le rang des systèmes suivants :

(i) $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ avec :

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 2, -4, 3, 1) \\ X_2 &= (2, 5, -3, 4, 8) \\ X_3 &= (6, 17, -7, 10, 22) \\ X_4 &= (1, 3, -3, 2, 0) \end{aligned}$$

(ii) $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ avec :

$$\begin{aligned} Y_1 &= (2, 3, 4, 3, 2) \\ Y_2 &= (1, 3, 5, 1, -6) \\ Y_3 &= (3, 3, 3, 1, 2) \\ Y_4 &= (2, 0, -2, -1, 6) \end{aligned}$$

En déduire la dimension des sev engendrés par ces 4 vecteurs

Exercice 3 (***). On considère $\mathbb{Z}_5^n$ (où $\mathbb{Z}_5$ désigne $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).

(i) Montrer que $\mathbb{Z}_5^n$ est un $\mathbb{Z}_5$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? En déterminer une base.

(ii) Déterminer le rang du système de vecteurs suivant de $\mathbb{Z}_5^4$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (\dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{1}) \\ Y_2 &= (\dot{1}, \dot{3}, \dot{5}, \dot{1}) \\ Y_3 &= (\dot{1}, \dot{5}, \dot{4}, \dot{5}) \\ Y_4 &= (\dot{4}, \dot{3}, \dot{2}, -\dot{4}) \end{aligned}$$

Exercice 4 (***). Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On définit sur E^2 l'addition classique et une loi externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ ((a+ib), (x, y)) &\mapsto (ax - by, ay + bx) \end{aligned}$$

Montrer que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-ev.
En tant que $\mathbb{C}$-ev, quelle est sa dimension ?

Exercice 5 (***)**.** Montrer que 1, $1-X$, $X-X^2$, X^2-X^3 est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3). Quelles sont les coordonnees de $3X-X^2+8X^3$ dans cette base ?

Exercice 6 ($\mathfrak{C}$)**.** On considère les vecteurs $x_1=(1,2,-5,3)$ et $x_2=(2,-1,4,7)$. Trouver une CNS sur λ et μ pour que $z=(-12,4,\lambda,\mu)$ appartienne au sev engendré par x_1 et x_2.

Exercice 7 ($\mathfrak{C}$)**.** L'ensemble suivant est-il un $\mathbb{R}$-ev :

$$V=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\,\exists(g,h)\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\text{ avec } g \text{ et } h \text{ croissantes, } f=g-h\}$$

pour l'addition et la multiplication par un réel "classique" sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 8 ($\mathfrak{C}$)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition classique et de la multiplication externe suivante :

$$\begin{array}{rcl}\cdot\,:\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \lambda,(x,y) & \mapsto & (\lambda x,0)\end{array}$$

Obtient-to ainsi un $\mathbb{R}$-ev ?

Exercice 9 ($\mathfrak{C}$)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u,v,w\in E$. Montrer que :

$$\{u,v,w\}\text{ libre}\Leftrightarrow\{u+v,v+w,w+u\}\text{ libre.}$$

Exercice 10 ($\mathfrak{Ch}$)**.** On s'intéresse tout d'abord à $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$ (on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré quelconque).

(ii) Déterminer une base de E et en déduire la dimension de cet espace. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}[X]$?

(iii) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\{1,1+X^2,(1+X)^2,X^2\}$.

(iv) On s'intéresse ensuite à $F=(\mathbb{Z}_2)_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On admettra que $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel.

Remarque : le polynôme noté $\dot{1}+X$ correspond en fait à $\dot{1}+\dot{1}X$.

(a) Déterminer une base de F et en déduire la dimension de cet espace.

(b) Déterminer cette fois le sous-espace vectoriel engendré par $\{\dot{1},\dot{1}+X^2,(\dot{1}+X)^2,X^2\}$.