Correction méthodo II

Session 2021 - 2022

On considère $u_1 = (1,0,1,0)^t$ et $u_2 = (0,1,0,1)^t$

1) On a différentes méthodes pour montrer qu'ils sont libres :

$\xrightarrow[\text{définition}]{(1)}$ Soient $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha \cdot (1,0,1,0) + \mu (0,1,0,1) = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 & \text{coord } 1 \\ \mu = 0 & \text{coord } 2 \\ \alpha = 0 & \text{coord } 3 \\ \mu = 0 & \text{coord } 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \mu = 0$

Donc u, v libres

$\xrightarrow{(2)}$ Montrer que leur rang est 2 :

$$\mathcal{S} \begin{cases} u_1 = (1,0,1,0) \\ u_2 = (0,1,0,1) \end{cases} \text{ déjà échelonné } \Rightarrow \text{rang } 2$$

etc ...

Donc

$\{\underbrace{u_1, u_2}_{\text{liés car } u_1+u_2 \text{ c.l. de } u_1, u_2}, u_1+u_2\}$ est de rang 2 (car c'est la taille de la + grande sous-famille libre)
$\Downarrow$
$\{u_1, u_2\}$

2) Soit F un sev de $\mathbb{R}^4$.

a) Montrons que $F^\perp$ sev de $\mathbb{R}^4$

$\rightarrow$ Non vide ? $\vec{0} \in F^\perp$?

Soit $\vec{u} \in F$ $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0 \rightarrow \vec{0} \in F^\perp$ ✓

$\rightarrow$ Stable par cl ? Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in F^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 \in F^\perp$

$\Updownarrow$

Soit $v \in F$

$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = 0$

$$\langle \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2, v \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, v \rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{car } u_1 \in F^\perp}} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, v \rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{idem}}} = 0$$

$v \in F$

Donc $F^\perp$ sev de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrons que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ (égalité d'ensembles)

$\{\vec{0}\} \subseteq F \cap F^\perp$?

Comme F et $F^\perp$ sont des sev
$\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in F^\perp$ ✓

$F \cap F^\perp \subseteq \{\vec{0}\}$?

Soit $v \in F \cap F^\perp$ $\quad v = \vec{0}$?

$$\underbrace{\langle v, v \rangle}_{= \|v\|^2} = 0 \text{ car } v \in F \text{ et } v \in F^\perp \implies \vec{v} = \vec{0}$$

Donc $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$

c) Soit $\{v_1 \dots v_k\}$ une base orthonormale de F.
On admet que
$u \in F^\perp$ ssi $\langle u, v_i \rangle = 0 \quad \forall i$) ($$)

Soit $v \in F$

$$v = \underbrace{\overbrace{\left(v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i\right)}^{u_1}}_{\in F^\perp ?} + \underbrace{\overbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i}^{u_2}}_{\in F ?}$$

Montrons que :

→ $u_1 \in F^\perp$? D'après ($$), il suffit de montrer que $(\forall j \ \langle u_1, v_j \rangle = 0$
Soit $j \in 1 \dots k$

$$\langle v - \sum_i \langle v, v_i \rangle v_i , v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \underbrace{\sum_i \langle v, v_i \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{sauf pour} \\ i=j}}}_{= \langle v, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{1}}$$

(seul terme non nul)

$= 0$

Donc $u_1 \in F^\perp$

→ $u_2 \in F$? Comme $v_1 \dots v_k$ base de F
u_2 est une c.l. des $v_i \implies u_2 \in F$

Déduisons-en que $\mathbb{R}^n = F + F^\perp$

$F+F^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ ✓
Évident car
$F, F^\perp$ sev de $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4 \subseteq F+F^\perp$?
Soit $v \in \mathbb{R}^4$
D'après (SS)

$$v = \underbrace{\left(v - \sum_i \langle v, v_i\rangle v_i\right)}_{\in F^\perp} + \underbrace{\sum_i \langle v, v_i\rangle v_i}_{\in F}$$

Donc $v \in F+F^\perp$
puis $\mathbb{R}^4 \subseteq F+F^\perp$ ✓

d) On a montré que $F+F^\perp = \mathbb{R}^4$
et $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ $\Longrightarrow$ F et $F^\perp$ sont en somme directe
ie $F+F^\perp = F \oplus F^\perp$

D'où $\boxed{F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4}$

Puis $\underbrace{\dim(\underbrace{F+F^\perp}_{\mathbb{R}^4})}_{4} + \dim(\underbrace{F\cap F^\perp}_{0}) = \dim F + \dim F^\perp$

D'où :

$$\boxed{\dim F^\perp = 4 - \dim F}$$

e) Calculons (pour l'exemple)

$\{\vec{0}\}^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \underbrace{\langle \vec{0}, \vec{v}\rangle = 0}_{\text{valable pour tout } \vec{v}\ !} \}$

$$\Longrightarrow \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^4$$

$(\mathbb{R}^4)^\perp = \{ \vec{v} \text{ tq } \forall u \in \mathbb{R}^4 \ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \}$
↳ vecteurs orthogonaux à tous les autres
intuition
⤳ seul $\vec{0}$ le vérifie ...

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^4 \quad \langle v, u\rangle = 0$
En particulier pour $u = v$:

$$\langle v, v\rangle = 0$$
$$\|v\|^2 \Longrightarrow \vec{v} = 0$$

Donc $(\mathbb{R}^4)^\perp = \{\vec{0}\}$.

3)

On prend $F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ pour les 2 vecs initiaux.

a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F^{\perp}$

$\iff$ D'après (SS) (*) $\begin{cases} \langle X, u_1 \rangle = 0 \\ \langle X, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$ puisque $\{u_1, u_2\}$ base de F

syst. linéaire

(→ 2 équations
→ inconnues : coords de $X \Rightarrow 4$) ⇝ 2 paramètres

(*) $\iff \begin{cases} \langle (x,y,z,t), (1,0,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t), (0,1,0,1) \rangle = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$

On choisit 2 paramètres (z, t)

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases}$$

ie

$$F^{\perp} = \{ \underbrace{(-z, -t, z, t)}_{z \cdot (-1,0,1,0) + t \cdot (0,-1,0,1)} ; z, t \in \mathbb{R} \}$$

b)

$$= \text{Vect}\{ \underbrace{(-1,0,1,0)}_{u_3}, \underbrace{(0,-1,0,1)}_{u_4} \}$$

⇝ donc dimension 2, ce qui correspond bien à

$$\dim F^{\perp} = 4 - \underbrace{\dim F}_{2}$$

c) Montrons que u_3, u_4 sont orthogonaux :

$\langle u_3, u_4 \rangle = 0 \implies$ orthogonaux.

Donc $\{u_3, u_4\}$ base orthogonale de $F^{\perp}$

Puis :

$\{u_1, u_2\}$ base de F $\qquad$ $\{u_3, u_4\}$ base de $F^{\perp}$

$\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

vecteurs orthogonaux par définition

Donc $\{u_1 \dots u_4\}$: vecteurs orthogonaux

Puis

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_4}{\|u_4\|} \right\} \quad \text{base orthonormale}$$

$= \sqrt{2}$

On pose

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2}} u_i \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \{e_1 \dots e_4\}$$

d)

i) Soit $P = P_{\text{canonique}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_4 \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$P^t \times P = \begin{pmatrix} — & e_1 & — \\ & \vdots & \\ — & e_4 & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_4 \\ | & & | \end{pmatrix}$$

on voit que le produit calcule les produits scalaires !

$$= \begin{array}{c|c} & i \\ \hline j & \langle e_i, e_j \rangle \end{array}$$

$= 1$ si $j = i$ $\qquad$ $= 0$ sinon

car base orthonormale

Donc $P^t \times P = I$.

$\Longrightarrow$ P matrice orthogonale.

ii) Si Q matrice orthogonale

$$\underbrace{Q^t \times Q = I}_{\text{c'est la relation de } Q^{-1} \text{ !}} \Longrightarrow Q^{-1} = Q^t$$

Donc ici :

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} — & e_1 & — \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$| - e_4 - |$$

4) Enfin on considère l'application linéaire f de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ dans la base canonique $\{i_1, \dots, i_4\}$

a) L'image de f est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique

i.e $\underbrace{f(i_1) \dots f(i_4)}_{\text{qui sont les vect. colonnes de } A\,!}$

Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\{f(i_1), f(i_2), f(i_3), f(i_4)\}\right)$

$f(i_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i_3$, $f(i_2) = i_4$, $f(i_3) = i_1$, $f(i_4) = i_2$

$= \mathbb{R}^4$!

Donc $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4} \Longrightarrow$ surjective

Puis par le th. du rang $\dim \mathrm{Ker} f = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4} - \underbrace{\dim \mathrm{Im}}_{4}$

et $\boxed{\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}} \Longrightarrow$ injective

Donc f est bijective.

b) On calcule

→ $f(u_1) = f(i_1) + f(i_3) = i_3 + i_1 = u_1$

$u_1 = (1, 0, 1, 0) = i_1 + i_3$

autre méthode : $f(u_1) = A \times u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ $f(u_2) = f(i_2 + i_4) = f(i_2) + f(i_4) = i_4 + i_2 = u_2$

$u_2 = (0, 1, 0, 1)$

Donc u_1, u_2 vects. propres pour $\lambda = 1$

$\rightarrow \underset{(-1,0,1,0)}{f(u_3)} = f(-i_1+i_3) = -\underset{i_3}{f(i_1)} + \underset{i_1}{f(i_3)} = -u_3$

$\rightarrow$ De même

$f(u_4) = -u_4$

Donc le spectre de f est $\{1,-1\}$

avec $\mathcal{E}_1 = \text{Vect}\{u_1, u_2\} = F \rightarrow \dim 2$

$\mathcal{E}_{-1} = \underbrace{\text{Vect}\{u_3, u_4\}}_{F^\perp} \rightarrow \dim 2$

total dim 4 donc on les a tous !

c) Donc dans la base $\{u_1, \dots u_4\}$ f devient diagonale, de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ symétrie orthogonale par rapport au sev F.