Examen de méthodologie du raisonnement
structures algébriques I - session 1
Polytech Marseille - Informatique 3

Alexandra Bac

9 novembre 2021

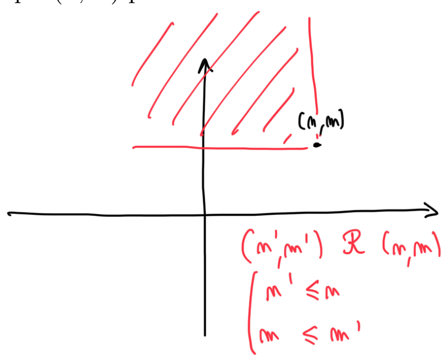
Epreuve de 2h. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (Relations d'ordre et démonstrations)**.**
Dans cet exercice, on considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la relation :

$$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \quad \text{sssi } n \leqslant n' \text{ et } m' \leqslant m$$

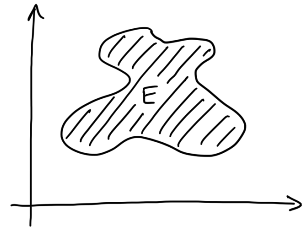
Donc attention **ce n'est pas l'ordre habituel** : par exemple, $(1, 3)\mathcal{R}(3, 1)$ mais $(1, 1) \not\mathcal{R}(2, 2)$ (regardez bien l'ordre de la relation sur les deux coordonnées !).

1. Sur le schéma suivant, on a représenté en rouge tous les éléments "plus petits" que (n, m) pour $\mathcal{R}$. Représentez en bleu tous les éléments plus grands que (n, m) pour cette même relation.



On admettra que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. Est-ce un ordre total ou partiel ?
3. Soient $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$. Dessinez le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ sur A.
4. A admet-il un plus grand/plus petit élément pour $\mathcal{R}$?
5. Soit maintenant E, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté ci-dessous. Représentez sur le dessin, les majorants (en bleu) de E, les minorants (en rouge) de E, ainsi que sa borne sup et sa borne inf.



Exercice 2 (Relations d'équivalence, groupes, démonstrations)**.** On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \quad \text{sssi } x^2 - y^2 \equiv 0\,[11] \tag{1}$$

1. On rappelle le lemme de Gauss : si un nombre premier p divise ab, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$. En déduire que $y \mathcal{R} x$ sssi

$$y \equiv \cdots [11] \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \{\cdots ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots ; k \in \mathbb{Z}\} \tag{3}$$

2. En déduire que $\mathbb{Z}$ comporte 6 classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, lesquelles ? On notera $\overline{x}$ la classe de $x \in \mathbb{Z}$ pour cette relation.
   Choisir un représentant unique par classe et en déduire $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
3. Montrez, en utilisant (3), que la multiplication quotient ($\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{x \times y}$) est bien définie.
4. Ecrire la table de multiplication de $\otimes$ sur $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
5. Pourquoi $\overline{0}$ est non inversible pour $\otimes$?
6. On note $G = \mathbb{Z}/\mathcal{R} - \{\overline{0}\}$. Montrez que $(G, \otimes)$ est un groupe commutatif (utilisez bien la définition de la multiplication quotient qui vous donnera un certain nombre de choses presque gratuitement).
7. Calculez $\mathrm{Gr}(\{\overline{2}\})$ dans ce groupe $(G, \otimes)$. Qu'en déduisez-vous ?
8. D'une manière générale, soient $(G_1, \star)$ et $(G_2, \star')$ deux groupes. Soient $x \in G_1$ et $y \in G_2$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathrm{Gr}(\{x\}) & \to & \mathrm{Gr}(\{y\}) \\ x^{(k)} = \overbrace{x \star \cdots \star x}^{k} & \mapsto & y^{(k)} = \overbrace{y \star' \cdots \star' y}^{k} \\ x^{(-k)} = \overbrace{\tilde{x} \star \cdots \star \tilde{x}}^{k} & \mapsto & y^{(-k)} = \overbrace{\tilde{y} \star' \cdots \star' \tilde{y}}^{k} \end{array}$$

   Montrez que f est un morphisme de $\mathrm{Gr}(\{x\})$ (sous-groupe de G_1) dans $\mathrm{Gr}(\{y\})$ (sous-groupe de G_2).

(Bonus) Trouvez un élément $\overline{x}$ de $(G, \otimes)$ tel que $\mathrm{Gr}(\{\overline{x}\}) = G$.
Trouvez un élément $\dot{n}$ de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ tel que $\mathrm{Gr}(\{\dot{n}\}) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
En déduire un morphisme bijectif entre $(G, \otimes)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.