§ 1. Relations binaires → ensembliste ...

I. Définition et prop.

① Relations binaires

E, F ⇝ ensembles ...

* déf : une relation (binaire) $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$
↳ graphe de $\mathcal{R}$ ($\mathcal{G}_\mathcal{R}$) → liste / ens. de tous les couples d'élts en relation

Deux élts $x, y \in E$ sont en relation pour $\mathcal{R}$ (noté $x \mathcal{R} y$) si $(x, y) \in \mathcal{G}_\mathcal{R}$.

x, y → sont en relation ($x \mathcal{R} y$) ou pas ($x \not\mathcal{R} y$)

↳ vu comme une $\boxed{\text{fonction booléenne } E \times E \to \text{Bool}}$ ← vision la + simple ....

ex : $A \subseteq B$ relation sur $\mathcal{P}(E)$.
$A, B \in \mathcal{P}(E)$
ensembles — entre ensembles

($\mathcal{P}(E)$ → ens. de tous les sous-ens. de E)

sur $\mathbb{R}$ ⇝ $\cdot \leq \cdot$ rel. binaire
$<$
$=$

sur l'ens. des prop. logiques P, Q ⇝ $P \Longleftrightarrow Q$ — V ou F ✓

sur l'ensemble des chaînes de caractères → "abc" $m_1 \, \mathcal{R}_1 \, m_2$ "aba"
$\mathcal{R}_2$

$\mathcal{R}_1'$ ⇝ commencent par la même lettre
$\mathcal{R}_1$ ⇝ même longueur

$\mathcal{R}_2$ ⇝ m_1 est un sous-mot de m_2
$\mathcal{R}_3$ ⇝ m_1 est un préfixe de m_2

sur $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $i \equiv j\ [m]$ congruence mod. m

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $i = j + k.m$

$\Longleftrightarrow$

$i - j = k.m$ $\sim$ i et j diffèrent à 1 mult. de m près

ex: $1 \overset{+k.5}{\equiv} 6\ [5]$

11

-9

-4

$\vdots$

$\rightsquigarrow$ $i \mid j$ i divise j $\longleftrightarrow$ j multiple de i

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $j = k.i$

② Prop. de ces relations

$\mathcal{R}$ rel. sur E

$\rightsquigarrow$ 4 grandes prop. qui caractérisent ces relations.

sur $\mathbb{R}$: $=$, $\leq$, $<$

sur $\mathbb{Z}$: $\equiv [m]$, $\mid$

sur string: $\mathcal{R}_{sm}$ (sous-mot), $\mathcal{R}_{p}$ (préfixe)

sur $\mathcal{P}(E)$: $\subseteq$

* réflexivité : $\mathcal{R}$ reflexive si $\forall x \in E$ tq $x \mathcal{R} x$

ex:

$\mathcal{R}$ réflexive	$\mathcal{R}$ non réflexive
$=$	$<$
$\leq$	
$\equiv [m]$	
$\mid$	
$\mathcal{R}_{sm}$	
$\mathcal{R}_p$	
$\subseteq$	

* transitivité : $\mathcal{R}$ transitive si $\forall x, y, z \in E$ $\left.\begin{array}{c} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{array}\right) \Longrightarrow x \mathcal{R} z$

ex: Tous ces exemples sont transitifs.

$\equiv [n]$

$i \equiv j\ [n] \rightsquigarrow j = i + k_1 \cdot n$

$j \equiv k\ [n] \rightsquigarrow k = j + k_2 \cdot n$

$k = i + (k_1 + k_2) \cdot n$

$i \equiv k\ [n]$ ✓

$i \mid j \rightsquigarrow j = k_1 \cdot i$

$j \mid k \rightsquigarrow k = k_2 \cdot j$

$k = (k_1 k_2)\, i \implies i \mid k$ ✓

* symétrie

$\mathcal{R}$ symétrique si :
$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$

ex: $\mathcal{R}$ symétrique

sur $\mathbb{R}$: $=$

sur $\mathbb{Z}$: $\equiv [n]$ (*)

$\mathcal{R}$ non symétrique

sur $\mathbb{R}$: $\leq$, $<$

sur $\mathbb{Z}$: $\mid$

sur string: $\mathcal{R}_{sm}$, $\mathcal{R}_p$

sur $\mathcal{P}(E)$: $\subseteq$

$< \rightsquigarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \implies y < x$ FAUX ✓

(*) $\boxed{i \equiv j\ [n]} \overset{?}{\implies} j \equiv i\ [n]$?

on suppose

$\Longleftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $i = j + k \cdot n$?

Donc $j = i + k' \cdot n$
$\exists k' \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$i = j\ (-k') \cdot n$

on pose $k = -k'$ ✓

$\boxed{\text{symétrique}}$

$i \mid j \not\implies j \mid i$?

* antisymétrie — $\mathcal{R}$ antisymétrique si :

$$\forall x, y \in E \quad \left(\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} x \end{matrix} \right) \Longrightarrow x = y$$

intuitivement : 2 élts sont en relation dans au plus 1 sens

($\neq$ $\mathcal{R}$ non symétrique)

ex :

sur $\mathbb{R}$			sur $\mathbb{Z}$	sur string		sur $\mathcal{P}(E)$
$=$	$\leqslant$	$<$	$\mid$	$\mathcal{R}_{sm}$	$\mathcal{R}_p$	$\subseteq$
✓	✓	✓ (*)	(**) sur $\underline{\underline{\mathbb{N}}}$ ✓	✓	✓	✓

(*) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

si $x < y$ et $\underline{y < x}$ $\Longrightarrow$ $x = y$? vrai ! car $F \Longrightarrow \ldots$ toujours vrai.

(**) Soient $i, j \in \mathbb{Z}$

si $i \mid j$ et $j \mid i$ $\Longrightarrow$ $i = j$?

On suppose $i \mid j$ et $j \mid i$ — $i = j$?

$j = k.i$ $\qquad$ $i = k'.j$

$i = k.k'.i \Longrightarrow kk' = 1$ ou $i = 0$

$\Downarrow$

on a bien $i = j$ $\leftarrow$ $k = k' = 1$

ou $k = k' = -1$ $\to$ $i = -j$

comme $j = ki$ $\Downarrow$ $j = 0$ $\Rightarrow i = j$ ✓

$\mid$ n'est pas antisymétrique (au signe près...) $\qquad$ $\left. \begin{matrix} i \mid j \\ j \mid i \end{matrix} \right\} \Rightarrow i = \underset{\mathbb{Z}}{\pm} j \ldots$

antisym. sur $\mathbb{N}$ ✓

On a ainsi 2 grandes classes de relations

→ rel. d'ordre

→ antisymétriques

→ réflexive

→ transitive

→ rel. d'équivalence

→ symétrique

→ réflexive

→ transitive

II. Relations d'ordre

ex : sur $\mathbb{R}$: $=$; $\leq$, $\geq$ — ~~$<$~~ — total

partiel

sur $\mathbb{Z}$: $\leq$ $\geq$ — $\not|$

$\mathbb{N}$: $|$ → $|$ partielle ex $2 \not| 3$ et $3 \not| 2$

sur string : $\mathcal{R}_{sm}$, $\mathcal{R}_{+}$ → "aba" $\cancel{\mathcal{R}}_{sm}$ "abc"

sur $\mathcal{P}(E)$: $\subseteq$ — "abc" $\cancel{\mathcal{R}}_{sm}$ "aba"

A, B

* **déf** : on dit qu'une rel. d'ordre est un ordre total si
$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

sinon il est partiel.

Dans la suite $\mathcal{R}$ est une rel. d'ordre sur E.

des éléments

* **déf** : soit $A \subseteq E$

On dit que A admet un plus grand élément M (resp. plus petit elt m) si

1) $M \in A$ (resp. $m \in A$)

2) $\forall x \in A \quad x \mathcal{R} M$ (resp. $m \mathcal{R} x$).

S'il existe, le plus grand élément est noté $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

ex : sur $\mathbb{R}$ ~> $A = [1,2]$ → $\max(A) = 2$
$\leq$ → $\min(A) = 1$

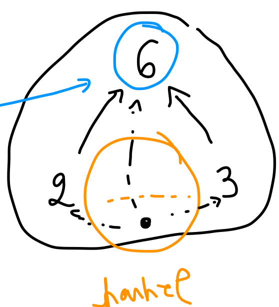
$A' = [1,2[$ → $\max(A)$ n'existe pas
→ $\min(A) = 1$

sur $\mathbb{N}$, $|$: $A = \{2,3,6\}$ → $\min(A)$ n'existe pas pour $|$
→ $\max(A) = 6$

Diagramme de Hasse (A fini)
L, on représente les élts de A ⟷ sommets d'un graphe (de la rel)
relation ⟷ arêtes (orientées) d'un graphe
(sans la transitivité) (*)

$x \mathcal{R} y$ ~> $x \longrightarrow y$

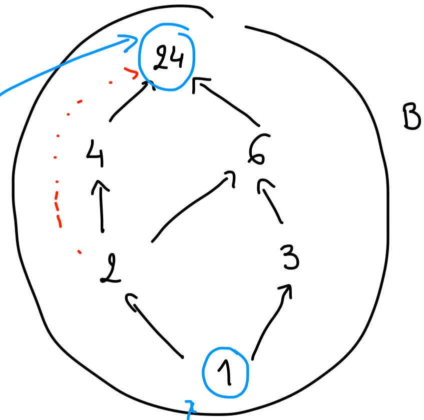
$|$ sur $\{2,3,6\}$



max
min — n'existe pas

$\exists\, m \in A$ tq $m \mathcal{R} x$ $\forall x \in A$?

$|$ sur $\{1, \overbrace{2,3,4,6,24}^{B}\}$



max
min

$C = B \cup \{25\}$

$\max(C)$ — n'existe pas
$\min(C) = 1$

* <u>déf</u> : $\mathcal{R}$ rel. d'ordre sur E. $A \subseteq E$

Les <u>majorants</u> (resp. <u>minorants</u>) de A <u>dans E</u> sont les éléments de E ($x \in E$) tq

$$\forall y \in A \quad y \,\mathcal{R}\, x \quad (\text{resp. } x \,\mathcal{R}\, y).$$

⚠ en général une <u>infinité de majorants</u>.

majorants, minorants, sup, inf → $\in E$

* <u>déf</u> : si l'ens. des majorants admet un plus (resp. plus grand) petit élément

⇝ <u>borne sup de A</u> (noté $\underline{\sup(A)}$)

(resp. <u>borne inf</u> de A — noté $\underline{\inf(A)}$).