TD 2 (suite)
Relations binaires
Ensembles quotients

Polytech Marseille - IRM 1ère année
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement

(***) Exercices de base à préparer impérativement pour le TD.
($\mathfrak{E}$) Exercices d'entraînement pour assimiler les exercices de base.
($\mathfrak{Ch}$) Exercice challenge à cherche en groupe après le TD.

1 Relations d'équivalence, classes d'équivalence, quotients

Exercice 1 (***)**.** On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$x \,\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = x - y$$

(i) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(ii) Quel est le graphe de $\mathcal{R}$.
(iii) Déterminez les classes d'équivalence des réels 0, 1, $\frac{1}{2}$.

On suppose maintenant que la relation $\mathcal{R}$ est définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, déterminez les éléments de $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 2 (***)**.** On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \;\Leftrightarrow\; a + d = b + c$$

(i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(ii) Déterminer les classes d'équivalence de $(0, 0)$, $(3, 1)$ et $(2, 4)$.
(iii) Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 3 (***)**.** On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x^2 \equiv y^2 \,[5]$$

(i) Montrez que c'est une relation d'équivalence
(ii) Déterminez l'ensemble quotient
(iii) Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

Exercice 4 ($\mathfrak{E}$)**.** On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = y - x$$

(i) Déterminer la classe d'équivalence de 0, 1 et -1.
(ii) Etant donné $x \in \mathbb{R}$ déterminer $\dot{x}$
(iii) En déduire le graphe de $\mathcal{R}$ (le tracer).

Exercice 5 ($\mathfrak{E}$)**.** On définit sur $\mathbb{Z}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(x,y) \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2 = (x-y)^2$$

(i) Déterminer les classes d'équivalence de $(0,0)$, $(3,1)$ et $(2,4)$.
(ii) Etant donné $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, déterminer $(\dot{a,b})$.
(iii) Tracer cette classe (pour (a,b) donnés).

Exercice 6 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$f\,\mathcal{R}\,g \;\Leftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0,\, \forall x \in \mathbb{R},\, (|x| > \varepsilon \Rightarrow f(x) = g(x))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 7 ($\mathfrak{E}$)**.** Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence :
(i) $\mathcal{R}$ définie par :

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \;\Leftrightarrow\; xy = x'y'$$

(ii) $\mathcal{R}'$ définie par :

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} xy = x'y' \\ xx' \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 8 ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \;\Leftrightarrow\; \exists a,b \in \mathbb{R},\, ab \neq 0 \text{ et } x = ax', y = by'$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.
Même question en remplaçant la condition $ab \neq 0$ par $ab > 0$.

Exercice 9 ($\mathfrak{Ch}$)**.** Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; xe^y = ye^x$$

(i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Contrairement aux relations étudiées dans les exercices, on ne peut pas déterminer $\dot{x}$ de manière explicite.
(ii) Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$.
(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$
(Bonus) En déduire une énumération de l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$. Si on souhaitait définir une opération sur les classes : $\dot{x} \oplus \dot{y} = (\dot{x+y})$, serait-elle bien définie ?