TD 2 (1/2)
Relations binaires
Relations d'ordre

Polytech Marseille - IRM 1ère année
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement

(***) Exercices de base à préparer impérativement pour le TD.
($\mathfrak{E}$) Exercices d'entraînement pour assimiler les exercices de base.
($\mathfrak{Ch}$) Exercice challenge à cherche en groupe après le TD.

1 Relations d'ordre

Exercice 1 (***)**.** Soit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et la relation $\mathcal{R} = \subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$:

(i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ? Est-ce une relation d'ordre total ?

(ii) Montrer que toute paire $\{X, Y\}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure, les déterminer.

Exercice 2 (***)**.** Sur $\mathbb{N}^*$ on définit la relations suivante :

$$n \preccurlyeq m \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{N}^* \,; \, m = kn$$

Soient $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$.

(i) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre

(ii) Pour A et B, dessiner la relation entre les éléments en utilisant une flèche $n \to m$ quand $n \preccurlyeq m$. La relation est-elle totale ou partielle ?

(iii) A et B admettent-ils un plus grand élément ? Un plus petit ?

(iv) Une borne sup ? Borne inf ?

Exercice 3 (***)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation d'ordre notée $\preccurlyeq$ définie par :

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \ \ \textit{sssi} \ \ x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

(i) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

(ii) Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

Exercice 4 ($\mathfrak{E}$)**.** Sur $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$n \,\mathcal{R}\, m \text{ sssi } n \,|\, m$$

(i) Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

(ii) Soit $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$.

(a) Dessiner la reiation $\mathcal{R}$ entre les éléments de A.

(b) A admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ? quels sont ses majorants et minorants ? A admet-t-il une borne sup ? une borne inf ?

(iii) Soit $B = \{2, 3, 5, 6, 30\}$, mêmes questions.

Exercice 5 ($\mathfrak{C}$)**.** Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$p \,\mathcal{R}\, q \quad \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ q = p^k$$

Montrer que :

(i) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$

(ii) $\mathcal{R}$ est-il un ordre total ou partiel ?

(iii) Déterminer les majorants de $\{2, 3\}$ pour cet ordre.

Exercice 6 ($\mathfrak{C}$)**.** Etudier la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \;\Leftrightarrow\; x \leq x',\, x \leq y',\, y \leq x',\, y \leq y'$$

($\leq$ représente, bien sûr, l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$)

Exercice 7 ($\mathfrak{C}$)**.** Etudier la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; (\exists n \in \mathbb{N}^*,\, y = x^n)$$