# TD 1
# Logique, ensembles, applications

Polytech Marseille - IRM 1ère année
Alexandra Bac

Méthodologie du raisonnement

(***) Exercices de base à préparer impérativement pour le TD.
($\mathfrak{E}$) Exercices d'entraînement pour assimiler les exercices de base.
($\mathfrak{Ch}$) Exercice challenge à cherche en groupe après le TD.

## 1 Ensembles

**Exercice 1** (***). Soient $A$, $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$. Montrez que :

(i) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

(ii) Laquelle de ces deux égalités est vraie : $\complement_B A = \complement_E A \cap B$ ou $\complement_B A = \big(\complement_E A\big) \cap B$

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On note $\complement A = \complement_E A$.

**Exercice 2** (***). Soient $A$, $B$ deux ensembles. Démontrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A = B$

(ii) $A \cup B = A \cap B$

(iii) $A \Delta B = \emptyset$

**Exercice 3** (***). Donnez toutes les relations d'inclusion et d'appartenance entre les ensembles et éléments suivants :

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{1, 2, 3\}, \quad x = 2, \quad A_3 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}, \quad A_4 = \mathcal{P}(A_2)$$

**Exercice 4** (***). Soient $E$, $F$ deux ensembles. Démontrez l'équivalence :

$$E = F \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$$

**Exercice 5** ($\mathfrak{E}$). Donnez toutes les relations d'inclusion et d'appartenance entre les ensembles et éléments suivants :

$$A_1 = \{a, b, c\}, \quad A_2 = \{a\}, \quad x = a, \quad A_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}, \quad A_4 = \{a, b, c, d\}$$

**Exercice 6** ($\mathfrak{E}$). Donnez toutes les relations d'inclusion et d'appartenance entre les ensembles et éléments suivants :

$$A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{a\}, \quad x = a, \quad A_3 = \{a, \{a, b\}, b, c\}, \quad A_4 = \{a, b, c\}$$

**Exercice 7** ($\mathfrak{E}$). Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$, montrez que :

(i) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

(ii) $\complement\complement A = A$

**Exercice 8** ($\mathfrak{E}$)**.** Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$ :

(i) Montrer que $(A \cap B) \cap \complement(A \cap C) = A \cap B \cap \complement C$

(ii) En déduite que $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$

**Exercice 9** ($\mathfrak{E}$)**.** Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$ :

(i) Montrer que $(A \cup B) \cap \complement(A \cup C) = \complement A \cap B \cap \complement C$

(ii) En déduite que $(A \cup B)\Delta(A \cup C) = \complement A \cap (B\Delta C)$

**Exercice 10** ($\mathfrak{E}$)**.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre ensembles.

(i) Montrer que si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$, alors $A \cap C \subseteq B \cap D$ et $A \cup C \subseteq B \cup D$.

(ii) Montrer que $A \subseteq B \cap C$ sssi $A \subseteq B$ et $A \subseteq C$.

(iii) Montrer que $B \cup C \subseteq A$ sssi $B \subseteq A$ et $C \subseteq A$.

(iv) Montrer que $A \cup B = A \cap B$ sssi $A = B$.

(v) Montrer que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \;\Rightarrow\; B = C$

**Exercice 11** ($\mathfrak{E}$)**.** Soient $A$, $B$, $C$ des ensembles, laquelle de ces deux assertions est vraie ?

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq B \text{ et } A \not\subseteq C$$

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq B \text{ ou } A \not\subseteq C$$

La démontrer.

## 2 Applications

**Exercice 12** (***)**.** Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[ & \to & [1, +\infty[ \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array}$$

**Exercice 13** (***)**.** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ ; on définit $h = g \circ f$. Démontrez les implications suivantes :

(i) $h$ injective $\Rightarrow$ $f$ injective

(ii) $h$ injective et $f$ surjective $\Rightarrow$ $g$ injective

(iii) $h$ surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective

(iv) $h$ surjective and $g$ injective $\Rightarrow$ $f$ surjective

**Exercice 14** (***)**.** Soit $f : E \to F$ une application et $A, A' \subseteq E$ et $B, B' \subseteq F$ des ensembles. Montrer que :

(i) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ mais que l'inverse est faux

(ii) $\tilde{f}(B \cap B') = \tilde{f}(B) \cap \tilde{f}(B')$

(iii) $f(\tilde{f}(B)) \subseteq B$ mais que l'inverse est faux

(iv) $f(\tilde{f}(f(A))) = f(A)$

**Exercice 15** ($\mathfrak{E}$)**.** Soient $f$ et $g$ les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & nm \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$$

Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ?

**Exercice 16** ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $f$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \lfloor n/2 \rfloor \end{array}$$

Cette application est-elle injective ? surjective ?

**Exercice 17** ($\mathfrak{E}$)**.** Soit un ensemble $E$ et $a \in E$, on définit :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & A - \{a\} \text{ si } a \in A \\ A & \mapsto & A \cup \{a\} \text{ si } a \notin A \end{array}$$

Montrez que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

**Exercice 18** ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $f : E \to F$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, comparez :

$$\tilde{f}(\complement B) \qquad \text{et} \qquad \complement(\tilde{f}(B))$$

**Exercice 19** ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $f : E \to F$. Démontrez que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad \tilde{f}(f(\tilde{f}(B))) = \tilde{f}(B)$$

**Exercice 20** ($\mathfrak{E}$)**.** Soit $f : E \to F$, on définit :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$$

Démontrez l'équivalence :

$$f \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{F} \text{ injective}$$

**Exercice 21** ($\mathfrak{Ch}$)**.** Soit $E$ un ensemble non vide, et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ non vides, on définit :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

(i) Montrer que si $A \cup B = E$ alors $f$ est injective.
Indication : bien établir ce qu'il faut prouver, puis travailler de manière méthodique (voir le cours - si on doit prouver une égalité d'ensembles ..., si on doit prouver une équivalence ...). Le but est de contrôler votre raisonnement.

(ii) Montrer que $f$ n'est pas surjective.

(Bonus) Montrer que $f$ est injective sssi $A \cup B = E$.

## 3 Entiers, récurrence

**Exercice 22** (***)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

(i) $\mathcal{S}_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\mathcal{S}_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $6 \mid 7^n - 1$

**Exercice 23** (***)**.** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrez par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Quelle hypothèse faut-il sur $a$ et $b$ pour que cette formule soit valide ?
Peut-on la généraliser à $(a+b+c)^n$ ?

**Exercice 24** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\mathcal{S}_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Exercice 25** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Indication</u> : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\cdots}{k} + \frac{\cdots}{k+1}$

**Exercice 26** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

**Exercice 27** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

**Exercice 28** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$6 \mid 3^n - 3$$

**Exercice 29** ($\mathfrak{C}$)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Il existe aussi une démonstration directe (sans récurrence) très courte. La trouverez-vous ?