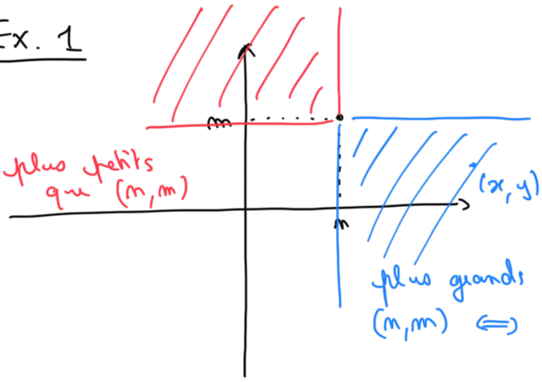
Correction méthodo 1
2021 - 2022

Ex. 1

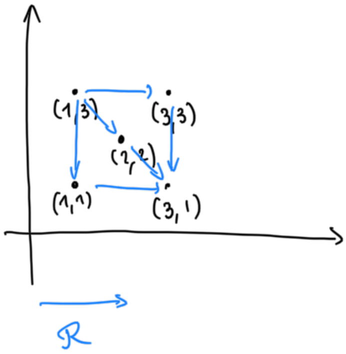
1)



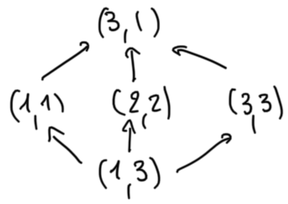
plus grands que $(n,m) \iff n \leq x$ et $y \leq m$

2) C'est un ordre partiel car par exemple $(1,1)$ et $(2,2)$ ne sont pas en relation.

3)

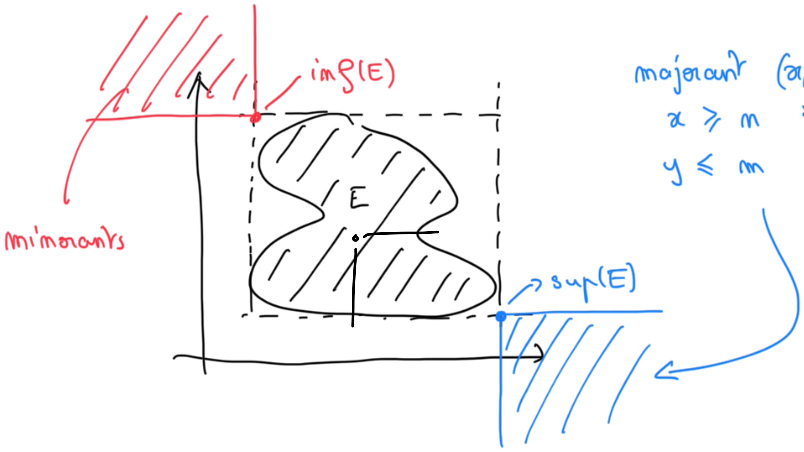


D'où le diagramme de Hasse :



4) Donc $(1,3) = \min(A)$
$(3,1) = \max(A)$

5)



majorant (x,y) ssi
$x \geq n \quad \forall (n,m) \in E$
$y \leq m \quad \forall (n,m) \in E$

Même raisonnement pour les minorants.

Ex. 2

On considère la rel. d'équivalence sur $\mathbb{Z}$:

$$x \mathcal{R} y \quad \text{ssi} \quad y^2 \equiv x^2 \ [11]$$

1)
$$\begin{aligned} x \mathcal{R} y &\iff y^2 \equiv x^2 \ [11] \\ &\iff y^2 - x^2 \equiv 0 \ [11] \\ &\iff (y-x)(y+x) \equiv 0 \ [11] \\ &\iff 11 \mid (y-x)(y+x) \end{aligned}$$

$$\underset{11 \text{ premier}}{\overset{\text{lemme Gauss}}{\Longrightarrow}} \quad 11 \mid y-x \quad \text{ou} \quad 11 \mid y+x$$

D'où $\boxed{y \equiv \pm x \ [11]}$

ie: $\boxed{y \in \{x + 11k \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 11k \,;\, k \in \mathbb{Z}\}}$

2) $\mathbb{Z}$ est partitionné par les classes. On va donc les énumérer jusqu'à avoir tout $\mathbb{Z}$:

$\overline{0} = \{11k \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

$\overline{1} = \{1 + 11k \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1 + 11k \,;\, k \in \mathbb{Z}\} = \overline{-1} = \overline{10}$

$\overline{2} = \{2 + \dots \quad\} \cup \{-2 + \dots \quad\} = \overline{-2} = \overline{9}$

$\overline{3} = \{3 + \dots \quad\} \cup \{-3 + \dots \quad\} = \overline{-3} = \overline{8}$

$\overline{4} = \{4 + \dots \quad\} \cup \{-4 + \dots \quad\} = \overline{-4} = \overline{7}$

$\overline{5} = \{5 + \dots \quad\} \cup \{-5 + \dots \quad\} = \overline{-5} = \overline{6}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, n est dans l'une de ces classes $\Rightarrow$ on les a toutes $\rightsquigarrow$ il y en a 6 : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$.

Donc

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{ \overbrace{\overline{0}, \underset{\overline{10}}{\overline{1}}, \underset{\overline{9}}{\overline{2}}, \underset{\overline{8}}{\overline{3}}, \underset{\overline{7}}{\overline{4}}, \underset{\overline{6}}{\overline{5}}}^{\text{représentants choisis : } 0 \to 5} \}.$$

3) Pour montrer que la multiplication quotient est bien définie revient à prouver que le résultat est

définie revient à prouver que le résultat est indépendant du choix du représentant :

$$\overline{x} = \{x + 11k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 11k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\underbrace{\overline{x}}_{\substack{\text{autre représentant :}\\ \varepsilon x + 11k \\ \text{avec } \varepsilon = \pm 1}} \otimes \underbrace{\overline{y}}_{\substack{\text{autre représentant :}\\ \varepsilon' y + 11k' \\ \text{avec } \varepsilon' = \pm 1}} = \overline{x \times y}$$

on obtient alors :
$$\overline{(\varepsilon x + 11k) \times (\varepsilon' y + 11k')}$$
$$\shortparallel$$
$$\overline{\varepsilon\varepsilon' xy + 11(\varepsilon k' + \varepsilon' k + \varepsilon\varepsilon' 11)}$$
$$\shortparallel$$
$$\overline{x \times y}$$

Donc $\otimes$ est bien définie.

4) Table de multiplication de $\otimes$ sur $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$:

	$\overline{0}$	$\overline{1} = \overline{10}$	$\overline{2} = \overline{9}$	$\overline{3} = \overline{8}$	$\overline{4} = \overline{7}$	$\overline{5} = \overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

5) $\overline{0}$ n'est pas inversible car $\forall \overline{m}$: $\overline{0} \times \overline{m} = \overline{0}$ (donc on ne peut pas avoir $\overline{0} \times \overline{m} = \overline{1}$ ...).

6) Montrons que $(G, \otimes)$ groupe :

→ $\otimes$ associative car
$\forall \overline{m}, \overline{m'}, \overline{p} \in G$

$$\begin{aligned}
(\overline{m} \otimes \overline{m'}) \otimes \overline{p} &= (\overline{m \times m'}) \otimes \overline{p} \\
&= \overline{(m \times m') \times p} \\
&= \overline{m \times (m' \times p)} \quad \text{car } \times \text{ assoc ds } \mathbb{Z} \\
&= \overline{m} \otimes (\overline{m'} \otimes \overline{p})
\end{aligned}$$

→ 1 neutre car
$\forall \overline{m} \in G$ $\quad \overline{1} \otimes \overline{m} = \overline{1 \times m} = \overline{m}$
$\qquad\qquad\quad \overline{m} \otimes \overline{1} = \overline{m \times 1} = \overline{m}$

→ Tout élément admet un symétrique (en bleu ds la table) :

	$\overline{0}$	$\overline{1} = \overline{10}$	$\overline{2} = \overline{9}$	$\overline{3} = \overline{8}$	$\overline{4} = \overline{7}$	$\overline{5} = \overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

→ $\quad \tilde{\overline{1}} = \overline{1}$, $\quad \tilde{\overline{2}} = \overline{5}$, $\quad \tilde{\overline{3}} = \overline{4}$

→ et comme $\times$ est commutative dans $\mathbb{Z}$, $\otimes$ l'est dans G

Donc $(G, \otimes)$ groupe commutatif.

7) $Gr(\{\overline{2}\}) = \{ \overline{2}^{(k)} ; k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \overline{2}, \overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4}, \overline{2} \otimes \overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{3}, \overline{2}^{(4)} = \overline{5}, \overline{2}^{(5)} = \overline{1} \}$

$= G$

Donc $\overline{2}$ est générateur de G.

8) D'après le cours : $\quad Gr(\{x\}) = \{ x^{(k)} ; k \in \mathbb{Z} \}$

et $\quad f(x^{(k)}) = y^{(k)} \in Gr(\{y\})$

Pour prouver que c'est un morphisme, il faut montrer :
$\forall a, b \in Gr(\{x\})$
$\qquad f(a * b) = f(a) *' f(b)$?

Si $a \in Gr(\{x\})$ $\quad a = x^{(k)}$
$\quad b$ ——— $\quad b = x^{(k')}$

Donc $\quad f(a * b) = f(x^{(k)} * x^{(k')})$

$$= f(x^{(k+k')})$$
$$= y^{(k+k')}$$
$$= y^{(k)} *' y^{(k')}$$
$$= f(a) *' f(b)$$

Donc f est un morphisme.

<u>Bonus</u>

D'après la question précédente

$$f : Gn(\{x\}) \longrightarrow Gn(\{y\})$$
$$x^{(k)} \longmapsto y^{(k)}$$

est un morphisme de groupes.

Pour qu'il soit bijectif, il suffit que

$$|Gn\{x\}| = |Gn\{y\}|$$

Et pour avoir un isomorphisme de G dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, il suffit que

$$x \in G \quad \text{et} \quad Gn(\{x\}) = G$$
$$y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Gn(\{y\}) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

or dans G, on a vu précédemment que $\overline{2}$ est générateur. Mais tous les éléments $\neq \overline{1}$ le sont aussi.

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, tous les éléments sont générateurs sauf $\dot{0}$

On choisit $x \in G \setminus \{\overline{1}\}$ (ex : $\overline{2}$)

$y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{\dot{0}\}$ (ex : $\dot{3}$)

$$f : \underset{\otimes}{G} \longrightarrow \underset{\oplus}{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \quad \text{est un isomorphisme}$$
$$x^{(k)} \longmapsto y^{(k)}$$

dans notre exemple :

$$f : (G, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus)$$
$$\overline{2} \longmapsto \dot{3}$$
$$\overline{2}^{(2)} = \overline{4} \longmapsto \dot{3} \oplus \dot{3} = \dot{1}$$
$$\overline{2}^{(3)} = \overline{3} \longmapsto \dot{3}^{(3)} = \dot{4}$$
$$\overline{2}^{(4)} = \overline{5} \longmapsto \dot{3}^{(4)} = \dot{2}$$
$$\overline{2}^{(5)} = \overline{1} \longmapsto \dot{3}^{(5)} = \dot{0}$$

(ouf, le neutre est bien envoyé sur le neutre).

Si on avait pris .

$x = \overline{3}$, $y = \dot{3}$

on aurait le morphisme :

$$\begin{aligned} g : \overline{3} &\longmapsto \dot{3} \\ \overline{3}^{(2)} = \overline{2} &\longmapsto \dot{1} \\ \overline{3}^{(3)} = \overline{5} &\longmapsto \dot{4} \\ \overline{3}^{(4)} = \overline{4} &\longmapsto \dot{2} \\ \overline{3}^{(5)} = \overline{1} &\longmapsto \dot{0} \end{aligned}$$

on voit que c'est un "appariement" différent.