Calcul de l'homologie avec des graphes orientés

Aldo González Lorenzo, Jean-Luc Mari, Alexandra Bac, Pedro Real

Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296 (France)
University of Seville, Department of Applied Mathematics I (Spain)

aldo.gonzalez-lorenzo@univ-amu.fr

20 juin 2014

Structure de la présentation :

- Introduction et motivation
- Le contexte
- Méthodes existantes
- Notre méthode
- Conclusion

But : analyser des images 2D ou des volumes 3D, trouver des propriétés pour trouver des équivalences.

Approche : homologie. Partie de la topologie basée sur les « trous ».

Exemple

On peut utiliser les nombres de trous pour classifier des images.

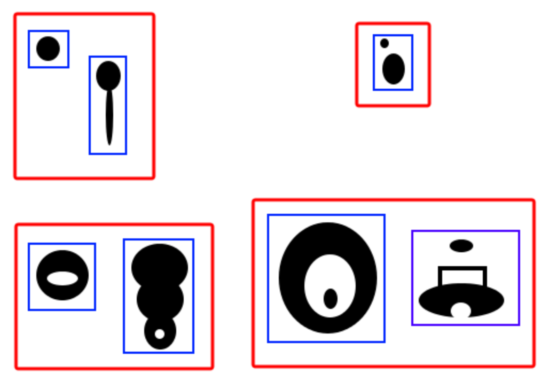


FIGURE – Classification des images par ses nombres de Betti.

Exemple

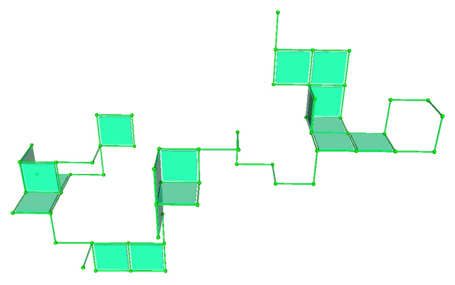


FIGURE – Une composante connexe et deux trous de dimension 1.

Exemple

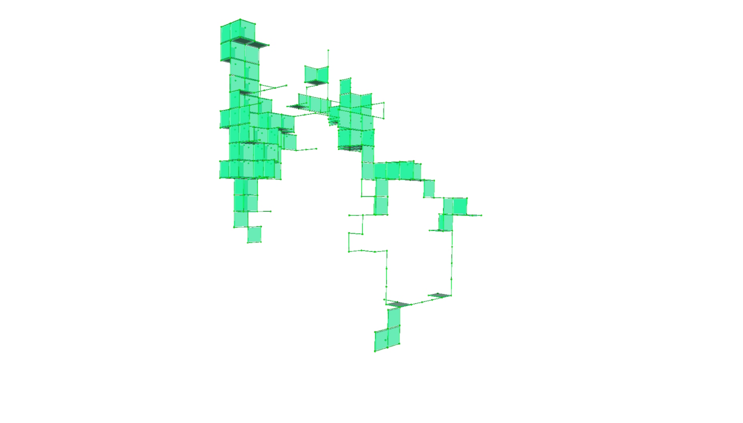


FIGURE – Ici c'est plus difficile.

Comment faire ?

- Pas 1 : Avoir une image binaire (2D, 3D, etc) ;
- Pas 2 : Construire un complexe cellulaire à partir d'elle et une adjacence choisie ;
- Pas 3 : Calculer l'homologie de ce complexe.

On verra tout ça en détail dans la suite.

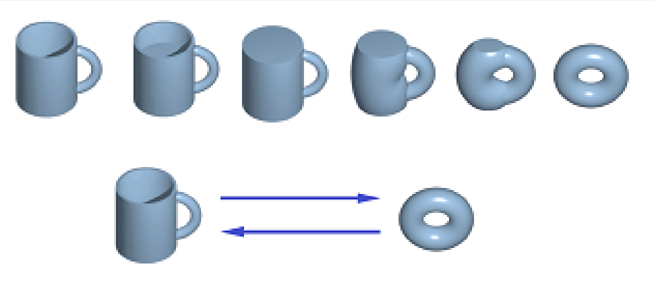
Pourquoi utiliser la topologie ?

Topologie : c'est la branche de la mathématique qui étudie les objets à déformation près.

Espaces homéomorphes : Deux objets (*espaces topologiques*) sont équivalents (*homéomorphes*) s'il existe une transformation continue de l'un vers l'autre.

Intuitivement, deux objets sont équivalents s'il existe une déformation où il n'y a pas d'arrachement ou de collage pour passer de l'un à l'autre. On donne une *flexibilité* aux objets.

Exemple



Source : `http://inperc.com`

Tous ces objets sont topologiquement équivalents.

Exemple

Un exemple moins exotique :

Source : `http://tvtropes.org`

Si on utilisait une approche différente de la topologie pour classifier les objets, on risquerait de dire que ces objets ne sont pas

La grande question

Étant donnés deux objets, sont-ils topologiquement équivalents ?

Pour y répondre, il faut décrire mathématiquement les deux objets et

- si oui, donner un homéomorphisme (application bijective, continue avec inverse continue) entre les deux.
- sinon, trouver une *propriété* ou un *invariant topologique* qui est différent pour les deux objets.

- On utilisera l'homologie ;
- Le nombre de trous dans chaque dimension est un invariant topologique.

Mais qu'est-ce qu'un trou ?

Exemple

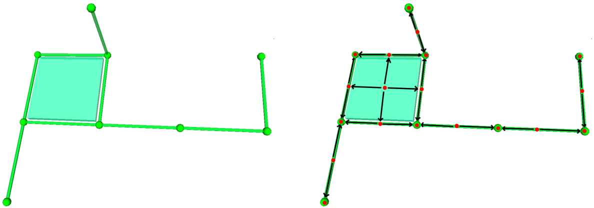
Un cylindre perforé.

Combien de trous y a-t-il ?

- Les trous sont *comme* des morceaux enlevés d'un objet ;
- Il faut donc pouvoir voir la *cicatrice* de ces morceaux.

- Pour calculer l'homologie, on se restreint à un type d'espace topologique : les complexes cubiques ;
- Intuitivement, c'est un objet formé par la union de points, lignes, carrés, cubes, . . ., collés par leurs bords ;
- Autrement dit, l'intersection de deux pièces (*cellules*) est vide ou est une autre pièce.

- Tout complexe cubique a un graphe orienté associé (*diagramme de Hasse* ou *graphe de connexité*) ;
- Les sommets sont les cellules ;
- Les arêtes vont d'une cellule vers son **bord**.



- L'homologie est définie à partir d'un **complexe de chaînes**. C'est un objet algébrique qui formalise le *bord* d'une cellule ;
- Les éléments sont les *chaînes*, sommes des cellules ;
- Le bord d'une chaîne $d(x)$ est la somme du bord des cellules dans la chaîne.

Il y a deux ensembles de chaînes importants :

- $Z = \ker(d)$, les chaînes dont leur bord est 0 (*cycles*) ;
- $B = im(d)$, les chaînes qui sont le bord d'une autre chaîne (*bords*)

Les groupes d'homologie sont constitués par les éléments de Z/B, c'est à dire, les cycles qui ne sont pas des bords.

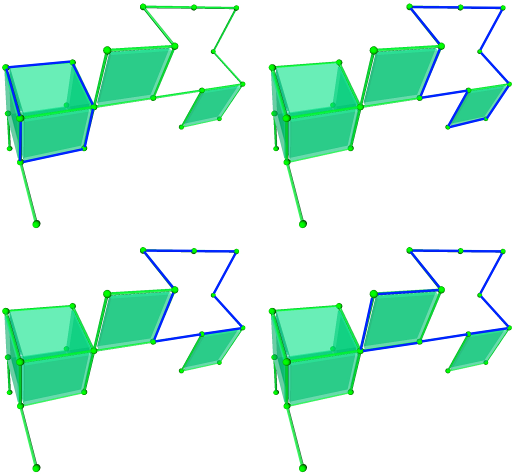


FIGURE – Quelques cycles.

- Quand on calcule l'homologie d'un objet, on cherche à donner une base (ensemble de *générateurs de l'homologie*) de chaque groupe d'homologie ;
- La taille de cette base est le *nombre de Betti*. C'est le nombre de trous indépendants.

Notons que cette base n'est pas unique.

La Forme Normal de Smith est une diagonalisation de la matrice d'adjacence du graphe associé au complexe cubique.

- La théorie de l'homologie effective introduit la notion de *réduction* ;
- Cela donne une relation entre le complexe de chaînes original et un autre *équivalent* mais plus petit.

La FNS donne une réduction parfaite vers l'homologie.

- Inventé par Robin Forman dans les années 90 ;
- Discrétisation de la théorie de Morse, très développée et utilisée pour calculer l'homologie dans le cas continu ;
- Elle donne une borne des nombres de Betti sans besoin de l'algèbre (elle est très bien cachée).

Définition

Un *Discrete Gradient Vector Field* (DGVF) est un couplage dans le graphe de connexité d'un complexe tel qu'il n'y a pas de « cycles » orientés.

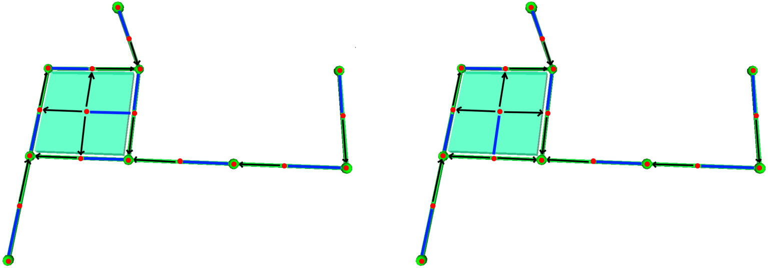


Figure – Sont-ils des couplages ?

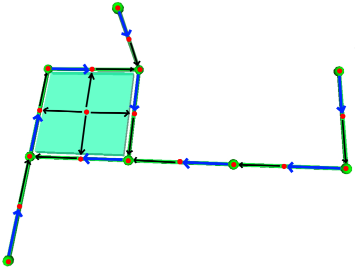


FIGURE – Possèdent-ils des chemins fermés (cycles orientés)

Étant donné un DGVF, une cellule est *critique* quand elle n'est pas couplée.

Théorème

Pour chaque $q \geq 0$, le q-nombre de Betti est plus petit que le nombre de q-cellules critiques.

1. Image binaire $\rightarrow$ complexe cubique ;
2. DGVF initial ;
3. On le corrige de façon itérative, en calculant la réduction et annulant des cellules critiques par couples ;
4. On calcule la réduction pour obtenir les générateurs d'homologie.

À partir d'une image binaire (ou ensemble de voxels), on crée le complexe cubique de son dual avec la 2·D-adjacence.

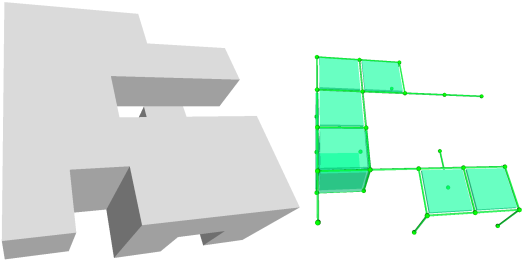
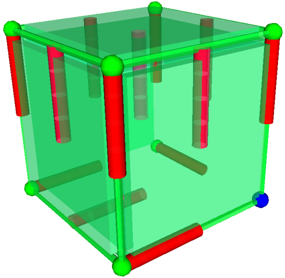


FIGURE – Gauche : une image. Droite : complexe cubique induit par cette image

- On établie un DGVF initial ;
- Il y a plusieurs méthodes. On choisit la méthode parallèle ;



- Typiquement, il y a trop de cellules critiques.

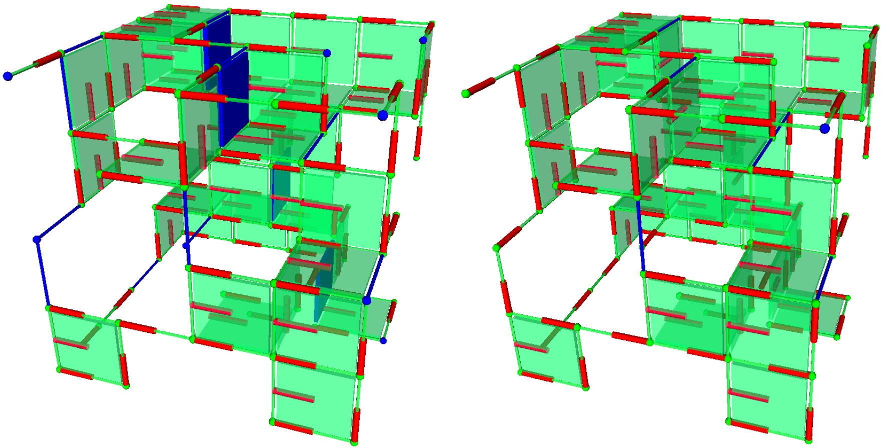


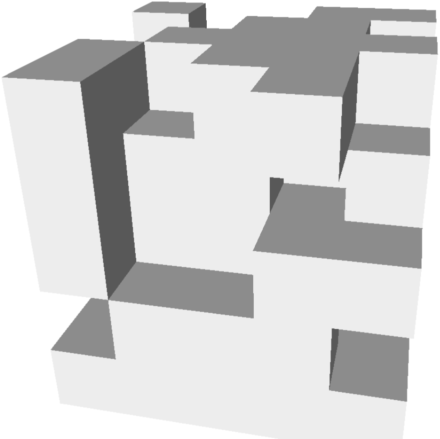
Figure – Un DGVF non optimal et un autre optimal.

À chaque itération,

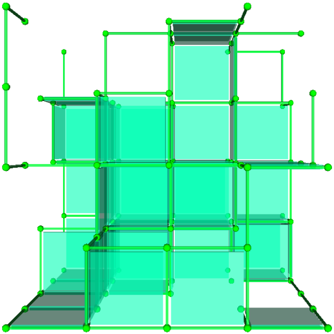
- On choisit une cellule critique σ ;
- On calcule $\pi d(\sigma)$;
- On choisit une cellule critique τ dans la chaîne $\pi d(\sigma)$
- On reverse un chemin de τ à σ

- Après chaque itération, deux cellules critiques peuvent être annulées ;
- À la fin, le nombre de cellules critiques coïncide avec les nombres de Betti.

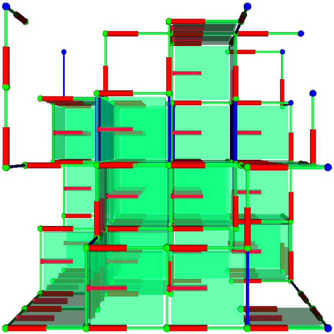
Image binaire



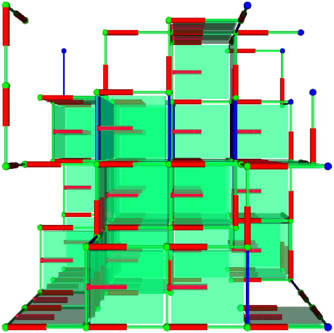
Complexe cubique



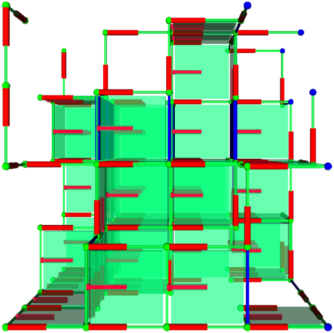
DGVF initial



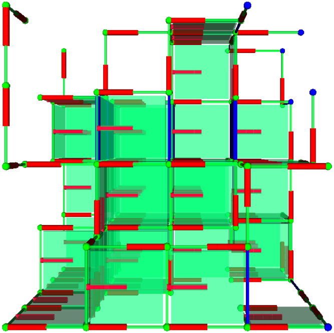
Correction. Pas 1



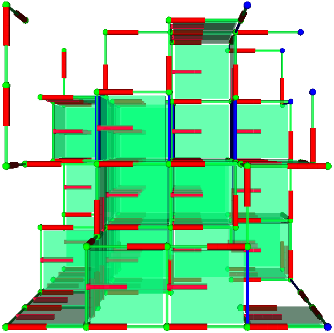
Correction. Pas 2



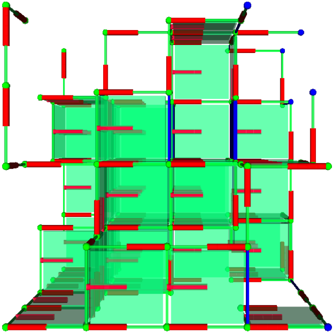
Correction. Pas 3



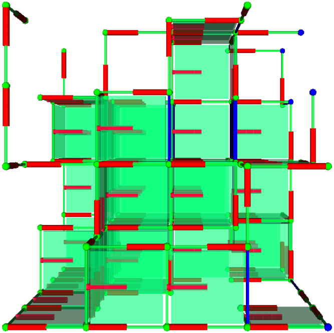
Correction. Pas 4



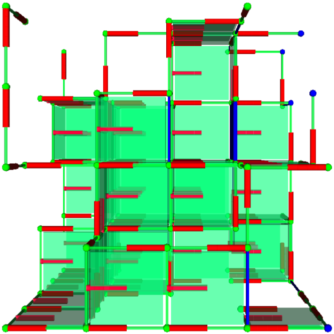
Correction. Pas 5



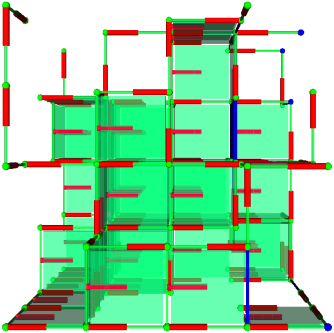
Correction. Pas 6



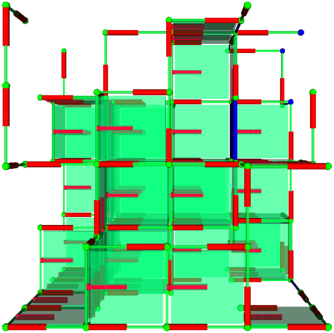
Correction. Pas 7



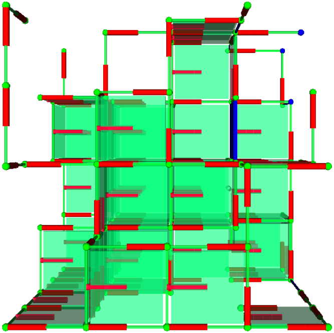
Correction. Pas 8



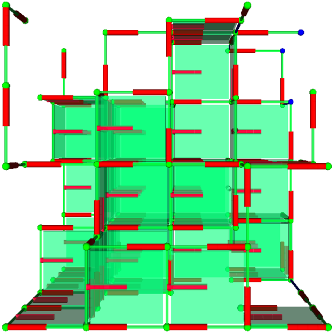
Correction. Pas 9



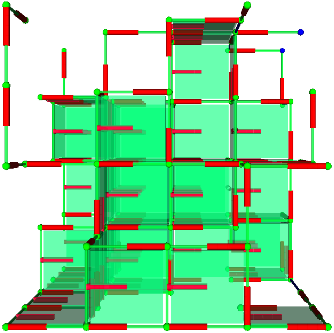
Correction. Pas 10



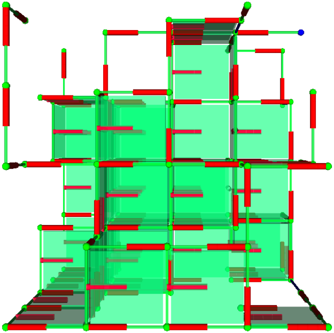
Correction. Pas 11



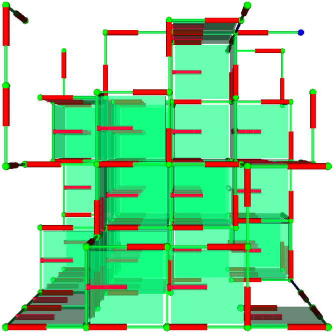
Correction. Pas 12



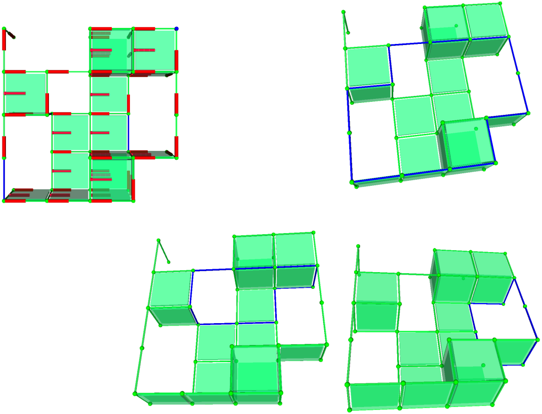
Correction. Pas 13



Correction. Pas 14



Il suffit de calculer πd sur les cellules critiques qui restent.



Les avantages :

- Contrôle absolu de l'information homologique (grâce à la réduction) ;
- Représentation non-redondante (de la réduction) ;
- Dimension quelconque.

Les objectifs futurs :

- Publier ce résultat en Roumanie ;
- Prouver la méthode et le publier dans une grande revue ;
- Optimiser la gestion de cycles ;
- Le DGVF initial ;
- Avoir des beaux générateurs.

Merci beaucoup. Questions ?