Notions de topologie algébrique et liens avec la géométrie

Aldo González Lorenzo

Université d'Aix-Marseille

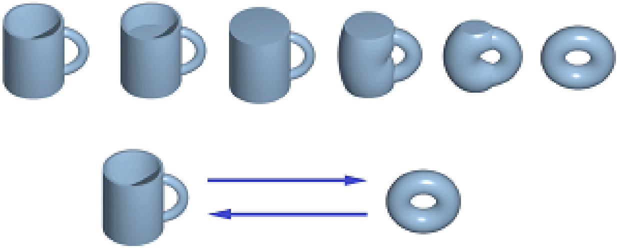
aldo.gonzalez-lorenzo@univ-amu.fr

13 novembre 2013

Topologie :

- Une branche de la mathématique qui étudie les objets à déformation près.
- Deux objets (*espaces topologiques*) sont équivalents (*homéomorphes*) s'il existe une transformation continue (une déformation où on ne peux pas arracher ni coller) d'un à l'autre.

Exemples d'espaces homéomorphes (équivalents)



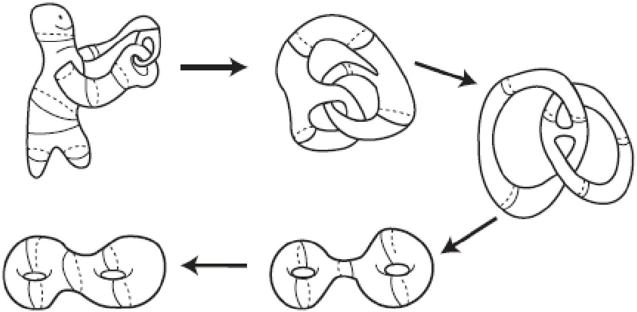
Source : `http://inperc.com`

Exemples d'espaces homéomorphes (équivalents)

Les lettres A et R sont homéomorphes

Exemples d'espaces homéomorphes (équivalents)

Un peu plus d'imagination



Source : `https://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/4/textbook/02.php`

La grande question est : comment savoir si deux objets sont homéomorphes ?

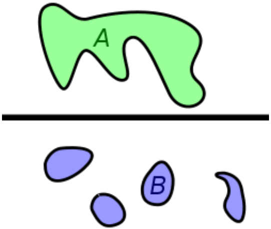
- S'ils sont homéomorphes, il faut trouver la déformation continue.
- S'ils ne le sont pas, il faut prouver qu'il n'existe aucune déformation continue (!). On peut se servir des *propriétés topologiques* ou des *invariants topologiques*

Propriété topologique Caractéristique d'un espace qui est préservé par homéomorphisme : connexité, connexité par chemins, compacité, ...

Invariant topologique Objets algébriques (nombre, groupe, . . .) d'un espace qui est préservé par homéomorphisme : nombre de composantes connexes, groupe fondamental, nombre de Betti, . . .

Exemple de propriété topologique

A est connexe et B non, donc ils ne sont pas homéomorphes.



Exemple d'invariant topologique

A a 1 trou et B a 2 trous, donc ils ne sont pas homéomorphes.

Branches de la topologie :

Topologie générale propriétés topologiques

Topologie algébrique invariants topologiques

Topologie géométrique variétés

Géométrie différentielle applications différentielles, variétés différentielles

Topologie algébrique

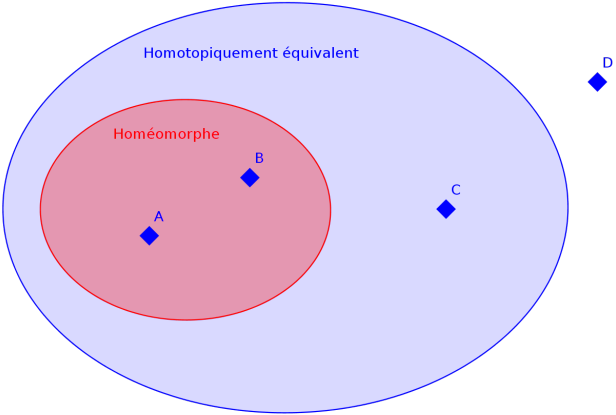
Typiquement il y a deux branches :

1. Homotopie
2. Homologie (et cohomologie)

Homotopie

- Homotopie : étude des déformations continues
- Elle propose une nouvelle notion de "équivalence" : l'équivalence d'homotopie.

- La relation d'équivalence de homotopie est plus faible que celle des espaces homéomorphes, puisqu'on permet les collapses.
- Donc, si deux objets son homéomorphes, ils sont homotopiquement équivalents.

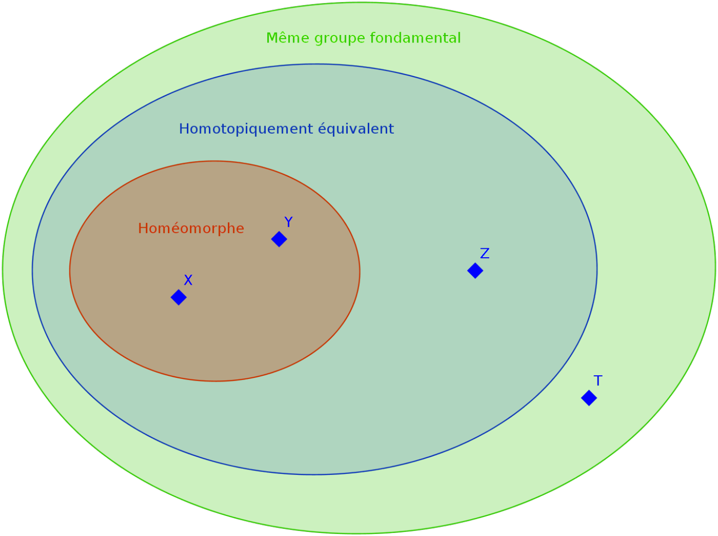


Exemples d'équivalence d'homotopie

R , P et O sont homotopiquement équivalentes (et pas homéomorphes)

Groupe fondamental

- Dans un objet on peut définir son groupe d'homotopie, aussi appelé *groupe fondamental*
- Deux objets homotopiquement équivalents ont le "même" groupe fondamental


Même groupe fondamental
Homotopiquement équivalent
Homéomorphe
Y
X
Z
T

Le groupe fondamental de A est $\mathbb{R}$ et celui de Z est le groupe null $\mathcal{O}$

$\Rightarrow$ Ils ne sont pas homotopiquement équivalents

$\Rightarrow$ Ils ne sont pas homéomorphes

Notre premier invariant topologique

Le groupe fondamental est un invariant topologique ! (mais il n'est pas calculable : problème du mot)

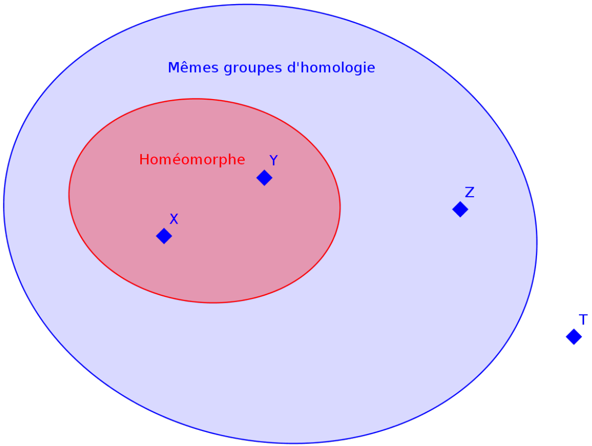
Homologie

L'homologie est une technique algébrique utilisé dans plusieurs domaines.

Formule de l'homologie

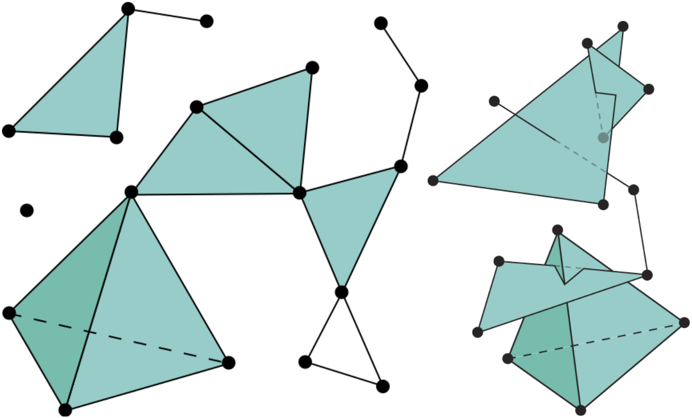
Groupes + morphismes = groupes d'homologie

Si deux objets son homéomorphes, ils ont les mêmes groupes d'homologie.


Mêmes groupes d'homologie
Homéomorphe
Y
X
Z
T

Complexes simpliciaux

On se restreint à une classe concrète d'espaces topologiques : les complexes simpliciaux.



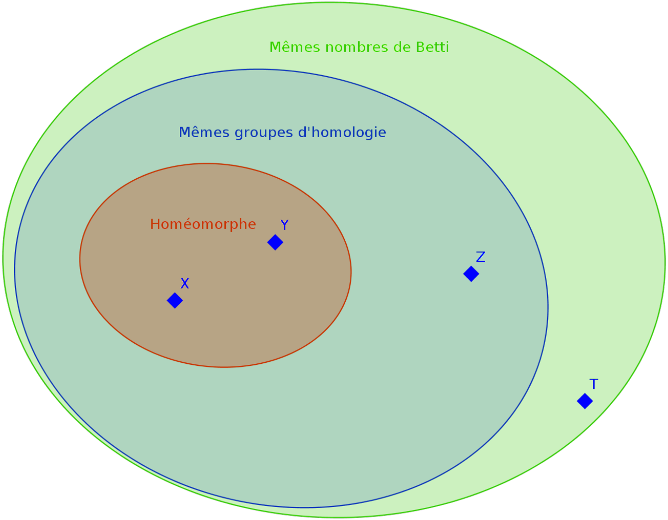
Source : Wikipedia

Alors,

- Groupes : les faces réunies par dimension
- Morphismes : relation d'incidence.
- Pour chaque dimension $q \geq 0$, on a un groupe (de homologie) $H_q = \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T_q$

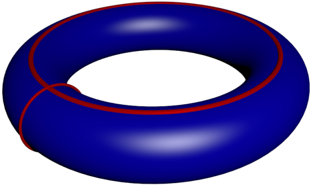
Notre deuxième invariant topologique

Ces β_q sont les nombres de Betti, et ils sont des invariants topologiques (et cette fois ils sont calculables)


Mêmes nombres de Betti
Mêmes groupes d'homologie
Homéomorphe
Y
X
Z
T

Exemples de nombres de Betti

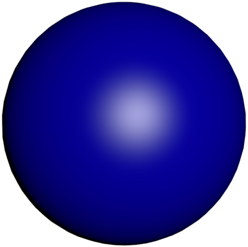
$$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^2, H_2 = \mathbb{Z}, H_3 = 0, \ldots$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \ldots$$

Exemples de nombres de Betti

$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = 0, H_2 = \mathbb{Z}, H_3 = 0, \ldots$



$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \ldots$

Interprétation des nombres de Betti

- β_0 : nombre de composantes connexes
- β_1 : nombre de "tunnels" ou "anses"
- β_2 : nombre de "cavités"

Merci beaucoup. Questions ?