Extraction d'information homologique des objets discrets s'appuyant sur des graphes orientés

Aldo González Lorenzo[1,2], Jean-Luc Mari[1], Alexandra Bac[1]
Pedro Real[2]

[1]Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296 (France)

[2]Université de Séville, Institut de Mathématiques IMUS (Espagne)

26 novembre 2014

Schéma de la présentation

Schéma de la présentation

Schéma de la présentation

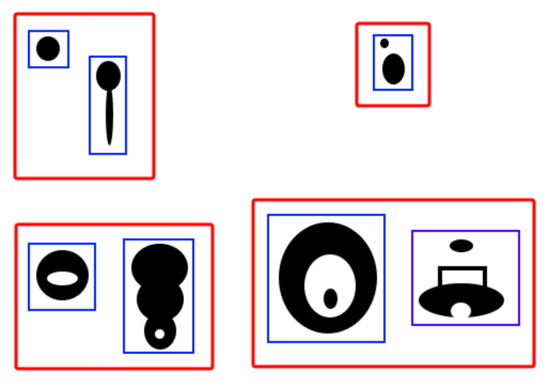
Schéma de la présentation

But : analyser des images 2D ou des volumes 3D, trouver des propriétés pour établir des équivalences.

Approche : homologie. Partie de la topologie basée sur l'étude des ≪ trous ≫.

Exemple

On peut utiliser le nombre de trous pour classifier des images.



Deux objets *équivalents* seront dans la même classe, et deux objets dans des classes différentes seront *non équivalents*.

Exemple

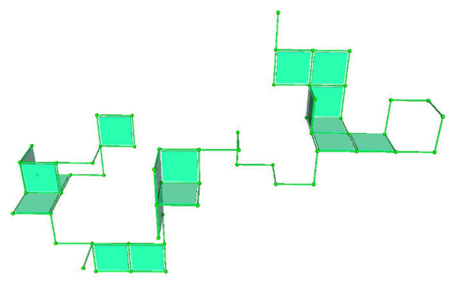


FIGURE : Une composante connexe et deux trous de dimension 1.

Exemple

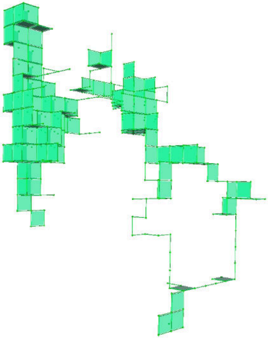


FIGURE : Ici c'est plus difficile.

Comment faire ?

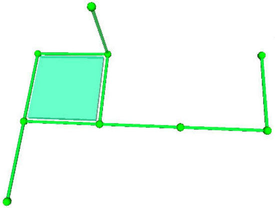
- Étape 1 : Avoir un image ou un volume binaire ;
- Étape 2 : Construire un complexe cubique à partir d'elle et d'une adjacence choisie ;
- Étape 3 : Calculer l'homologie de ce complexe.

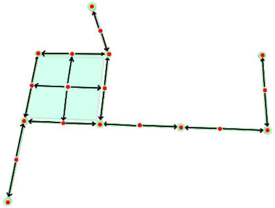
On verra tout ça en détail dans la suite.

Schéma de la présentation

- Pour travailler avec l'homologie, on se restreint à un type d'espaces topologiques : les complexes cubiques ;
- Intuitivement, c'est un objet formé par une union de points, segments, carrés, cubes, ..., collés par leurs bords ;
- Autrement dit, l'intersection de deux éléments (*cellules*) est vide ou un autre élément.

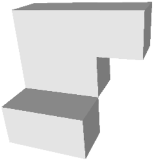
- Tout complexe cubique a un graphe orienté associé appelé le *diagramme de Hasse* ;
- Les sommets représentent les cellules ;
- Les arcs vont d'une cellule vers les cellules de son bord.

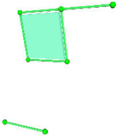




Objet discret → complexe cubique

À partir d'un objet discret de dimension n, on peut construire un complexe cubique par rapport à la relation de $3^n - 1$ ou de $2n$-adjacence.





Homologie

- L'homologie est définie sur un *complexe de chaînes*. C'est un objet algébrique qui formalise le *bord* d'une cellule ;
- Ses éléments sont des chaînes : combinaisons linéaires abstraites de cellules ;
- Le bord d'une cellule, $d(\sigma)$, est la somme des cellules du bord de σ avec leur coefficients respectifs.

Il y a deux types importants de chaînes :

- $Z = \ker(d)$, les chaînes dont le bord est 0 (*cycles*)
- $B = im(d)$, les chaînes qui sont le bord d'une autre chaîne (*bords*)

Les groupes d'homologie sont composés des éléments de Z/B, les cycles qui ne sont pas des bords.

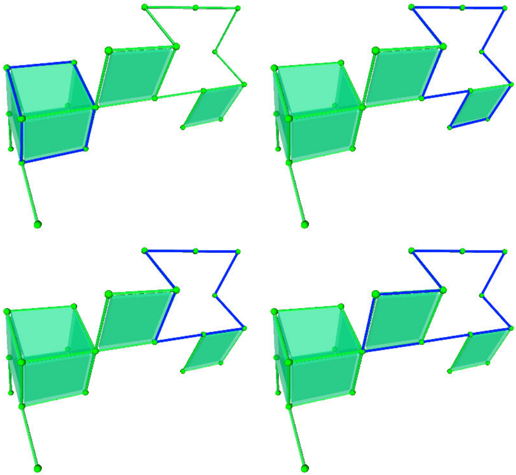


FIGURE : Quelques cycles.

- Quand on calcule l'homologie d'un objet, on cherche à trouver une base (ensemble de *générateurs de l'homologie*) de chaque groupe d'homologie ;
- La taille de cette base est le *nombre de Betti* (pour dimension $n \leq 3$). C'est le nombre de ≪ trous indépendants ≫.

Remarquons que cette base n'est pas unique.

Schéma de la présentation

- La théorie de l'Homologie Effective introduit la notion de *réduction* ;
- Cela donne une relation entre le complexe de chaînes original et un autre, équivalent et « plus petit » ;
- En gros, c'est un triplet d'applications entre chaînes (f, g, h) qui satisfait plusieurs propriétés.

Schéma de la présentation

- Inventé par Robin Forman dans les années 90 ;
- Discrétisation de la théorie de Morse, très développée et utilisée pour calculer l'homologie dans le cas continu ;
- Elle donne une borne des nombres de Betti sans besoin de l'algèbre (elle est très bien cachée).

Définition

Un *Discrete Gradient Vector Field* (DGVF) est un couplage dans le diagramme de Hasse tel qu'il n'y a pas de ≪ cycles ≫ orientés.

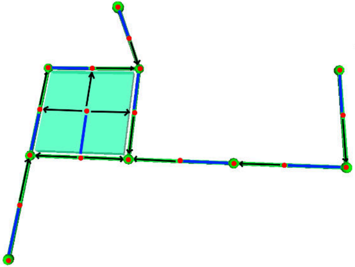


FIGURE : Gauche : ceci est un couplage. Droite : ceci n'est pas un couplage.

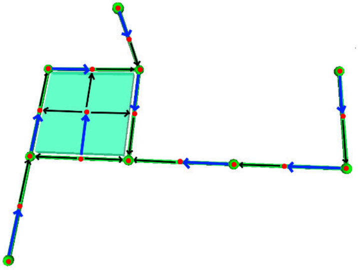


FIGURE : Gauche : ceci est un DGVF. Droite : ceci n'est pas un DGVF.

Étant donné un DGVF, une cellule est *critique* quand elle n'est pas couplée.

Théorème

Pour chaque $q \geq 0$, le q-nombre de Betti est plus petit que le nombre de q-cellules critiques.

DGVF $\rightarrow$ réduction

On peut définir une réduction à partir d'un DGVF :

$$\begin{aligned}
h(\sigma) &= \sum_{k\geq 0} V(1-dV)^k(\sigma) &&= V(\sigma) + h(1-dV)(\sigma)\\
f(\sigma) &= (1-dh-hd)(\sigma) &&= f(1-dV)(\sigma)\\
g(\sigma) &= \sigma
\end{aligned}$$

où

$$V(\sigma) = \begin{cases} \langle d(\tau), \sigma\rangle \cdot \tau, & (\sigma,\tau) \text{ fait partie du couplage}\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

($\langle d(\tau), \sigma\rangle$ est le coefficient de la cellule σ dans la chaîne $d(\tau)$)

Schéma de la présentation

1. Objet discret $\rightarrow$ complexe cubique ;

1. Objet discret $\rightarrow$ complexe cubique ;
2. DGVF initial ;

1. Objet discret $\rightarrow$ complexe cubique ;
2. DGVF initial ;
3. Correction itérative : à chaque fois, on élimine deux cellules critiques ;

1. Objet discret $\rightarrow$ complexe cubique ;
2. DGVF initial ;
3. Correction itérative : à chaque fois, on élimine deux cellules critiques ;
4. Générateurs d'homologie : on les obtient par la réduction.

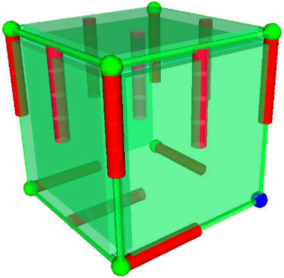
Étape 1 : le complexe

À partir d'un **objet discret** (ensemble de voxels), on construit le *complexe cubique* par rapport à la relation de 2n-adjacence.

FIGURE : Gauche : objet discret. Droite : son complexe cubique associé.

Étape 2 : DGVF initial

- On applique un DGVF quelconque ;
- Il y a plusieurs méthodes. On utilise la méthode parallèle ;



- Typiquement, il y a trop de cellules critiques.

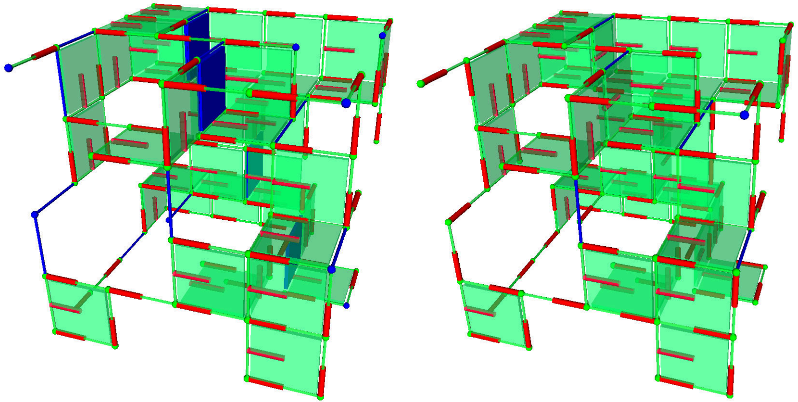


FIGURE : Gauche : un DGVF non optimal. Droite : un DGVF optimal.

Étape 3 : correction itérative

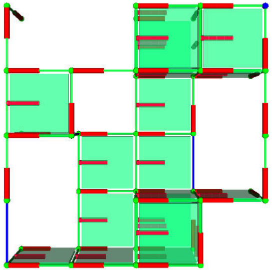
À chaque itération,

- On choisit une cellule critique σ ;
- On calcule $fd(\sigma)$. On choisit une cellule critique τ donnée par ce calcul ;
- On renverse le chemin de σ à τ.

À la fin, le nombre de cellules critiques coïncide avec les nombres de Betti.

Étape 4 : générateurs d'homologie

Il suffit de calculer $f = 1 - dh - hd$ sur les cellules critiques.



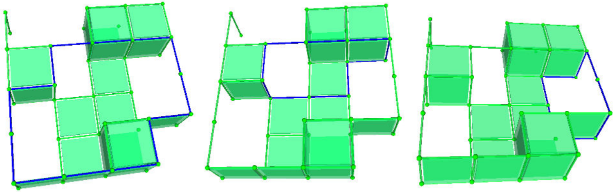
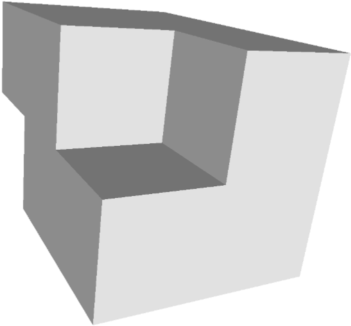
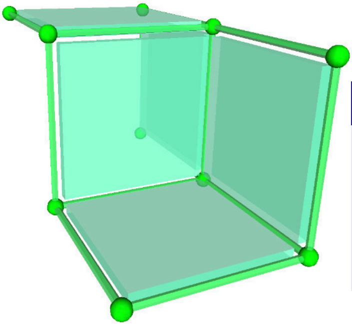


Schéma de la présentation



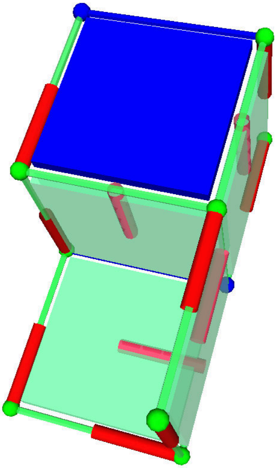
Object discret

10 voxels



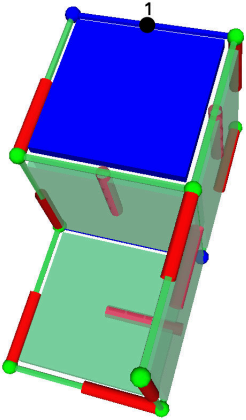
Complexe cubique

- 10 0-cellules
- 14 1-cellules
- 5 2-cellules



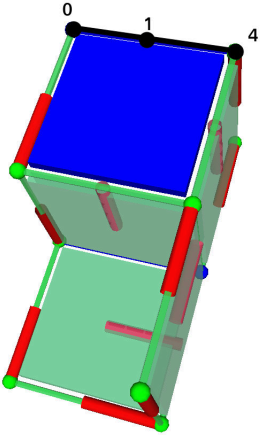
DGVF initial

- 2 0-cellules critiques
- 2 1-cellules critiques
- 1 2-cellules critiques



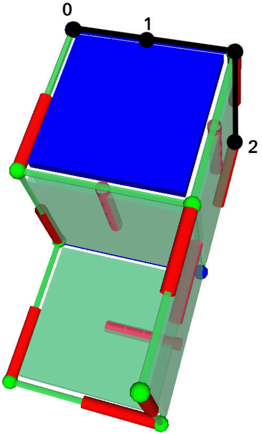
Correction de la cellule critique 1

On calcule $fd(1) =$



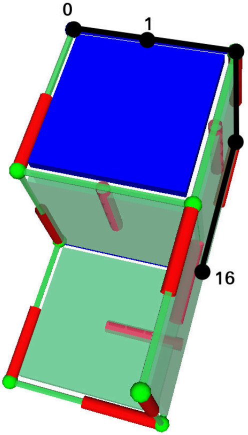
Correction de la cellule critique 1

On calcule $fd(1) =$
$f(-0+4) = -f(0) + f(4)$



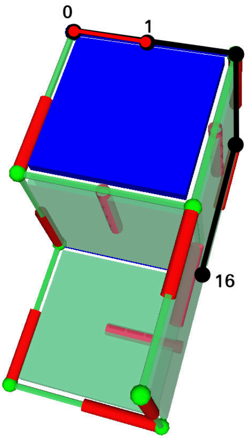
Correction de la cellule critique **1**

On calcule $fd(1) =$
$= -f(0) + f(2)$



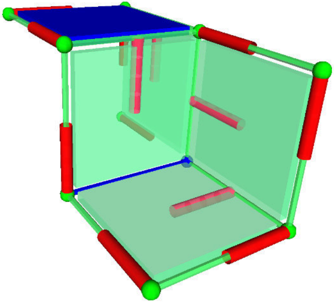
Correction de la cellule critique **1**

On calcule $fd(1) =$
$= -f(0) + f(16)$



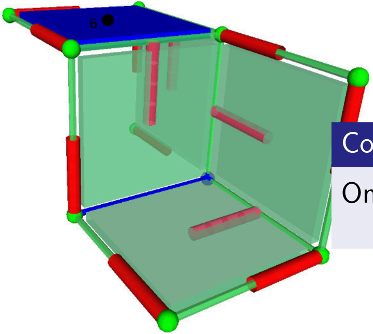
Correction de la cellule critique **1**

On calcule $fd(1) =$
$= -f(0) + f(16)$
On renverse le chemin de **1** à **0**



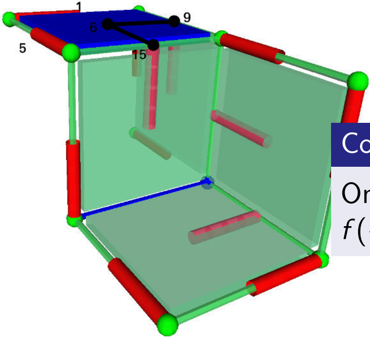
Correction de la cellule critique **1**

On calcule $fd(1) =$
$= -f(0) + f(16)$
On renverse le chemin de **1** à **0**



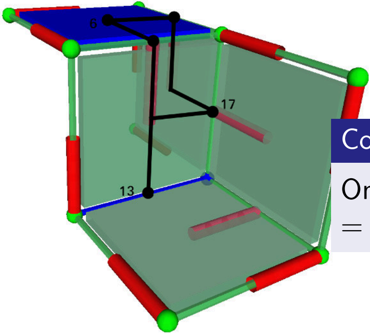
Correction de la cellule critique 6

On calcule $fd(6) =$



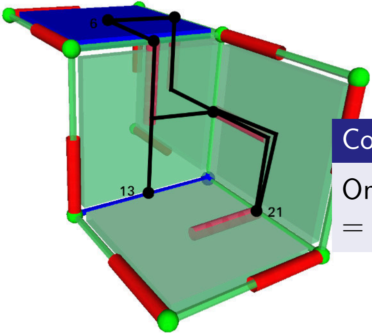
Correction de la cellule critique **6**

On calcule $fd(6) =$
$f(-1+5-9+15) = -f(9) + f(15)$



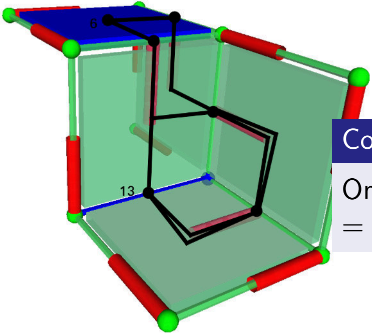
Correction de la cellule critique **6**

On calcule $fd(6) =$
$= -f(17) + f(17) - f(13)$



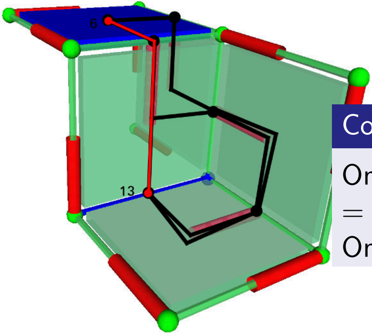
Correction de la cellule critique 6

On calcule $fd(6) =$
$= -f(21) + f(21) - f(13)$



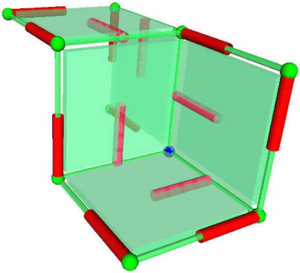
Correction de la cellule critique **6**

On calcule $fd(6) =$
$= -f(13) + f(13) - f(13) = f(13)$



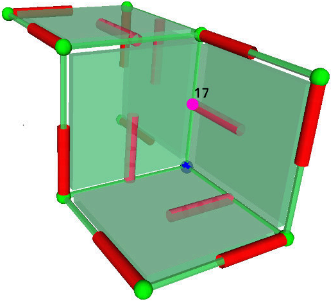
Correction de la cellule critique 6

On calcule $fd(6) =$
$= -f(13) + f(13) - f(13) = f(13)$
On renverse le chemin de **6** à **13**



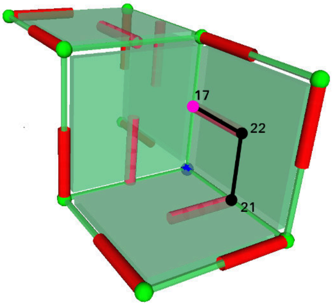
Correction de la cellule critique **6**

On calcule $fd(6) =$
$= -f(13) + f(13) - f(13) = f(13)$
On renverse le chemin de **6** à **13**



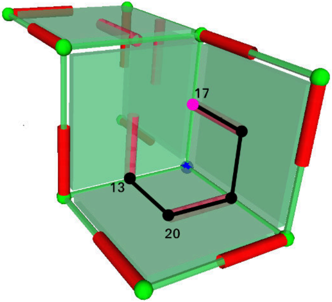
Calcul de *h* sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$



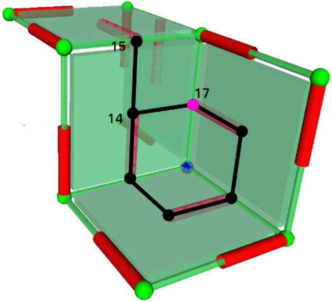
Calcul de h sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) = V(17) + h(1 - dV)(17) = -22 + h(21)$



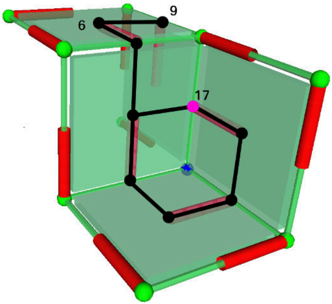
Calcul de h sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$
$= -22 - 20 - h(13)$



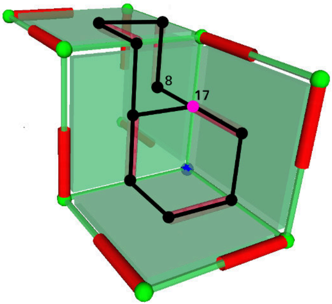
Calcul de *h* sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$
$= -22 - 20 - 14 - h(15) - h(17)$



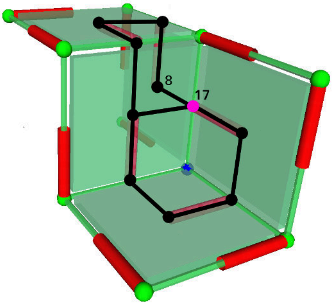
Calcul de h sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$
$= -22 - 20 - 14 - 6 - h(9) - h(17)$



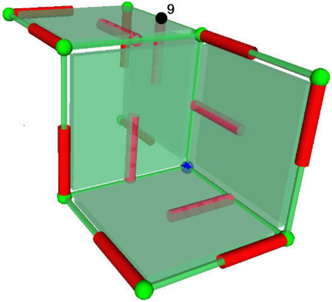
Calcul de h sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$
$= -22 - 20 - 14 - 6 + 8 + h(17) - h(17)$



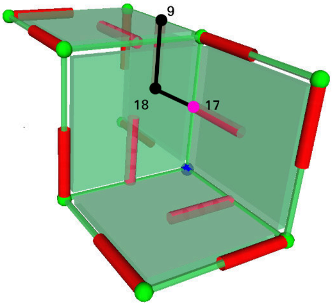
Calcul de h sur les *sommets de confluence*

On calcule $h(17) =$
$= -22 - 20 - 14 - 6 + 8 + h(17) - h(17)$
On substitue
$h(17) = -22 - 20 - 14 - 6 + 8$



Exemple

On calcule $h(9) =$



Exemple

On calcule $h(9) =$

$$= -18 + h(17)$$

$$= -18 - 22 - 20 - 14 - 6 + 8$$

- Contrôle absolu de l'information homologique (grâce à la réduction) ;
- Représentation non redondante de la réduction ;
- Coefficients entiers, dimension quelconque.

Perspectives :

- Minimiser le nombre de sommets de confluence ;
- Sélectionner des générateurs plus "jolis".

Merci. Questions ?