

Mesures géométriques pour les groupes d'homologie : vers une adaptation aux complexes simpliciaux

Aldo González-Lorenzo^{1,2}, Jean-Luc Mari¹, Alexandra Bac¹,
Pedro Real²

¹Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296 (France)

²Universidad de Sevilla, IMUS (Espagne)

23–24 mars 2015

Structure

1 Introduction

- Homologie
- Problématique

2 Les mesures

- Définition
- Applications

3 Vers les complexes simpliciaux

4 Conclusion

Structure

1 Introduction

- Homologie
- Problématique

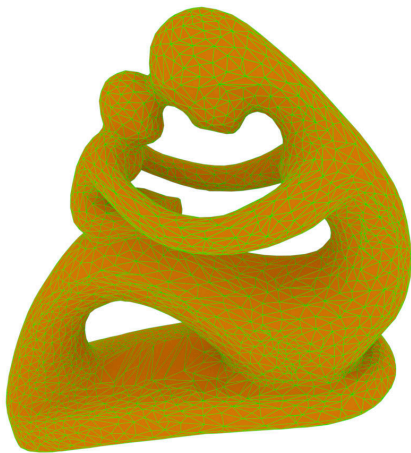
2 Les mesures

- Définition
- Applications

3 Vers les complexes simpliciaux

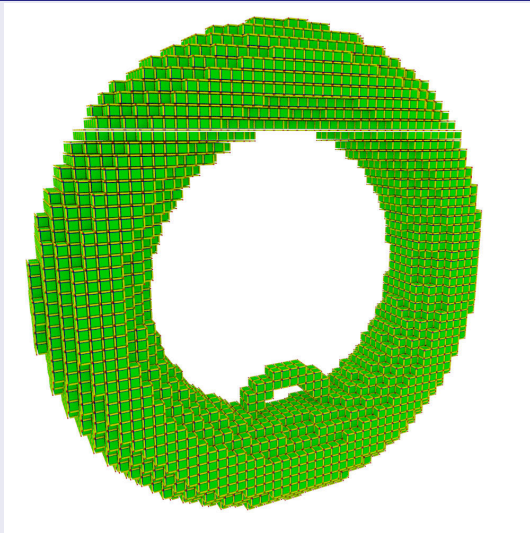
4 Conclusion

Homologie = trous



$(1,4,1)$

Homologie = trous



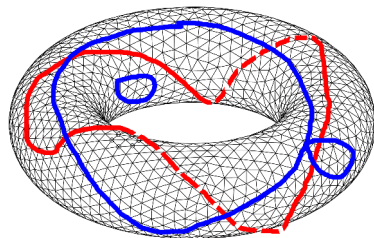
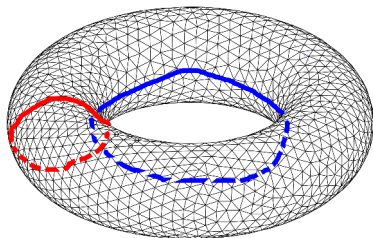
(1,2,0)

Trous :

- combien
- où (?)

Trous :

- combien
- où (?)

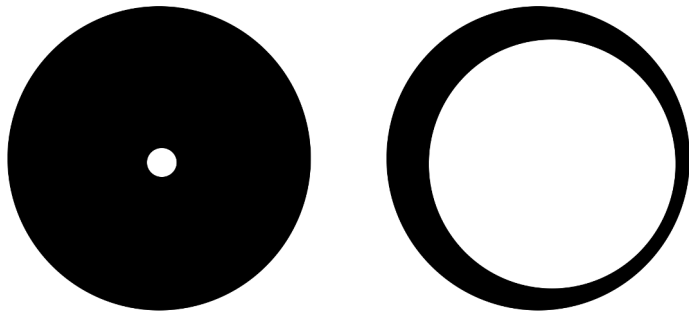


On peut :

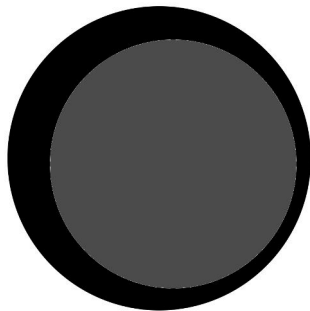
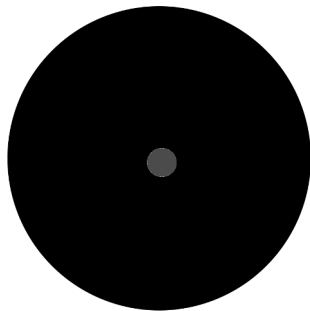
- classifier
- comprendre

Mais ...

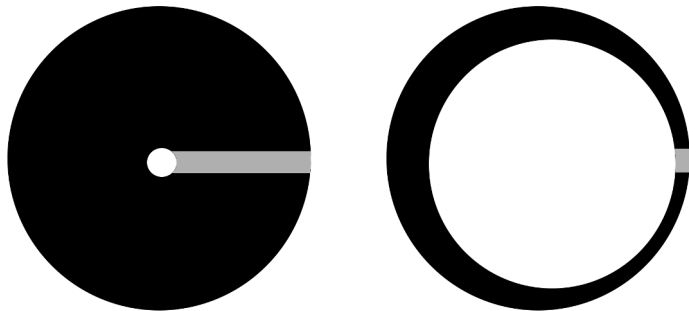
Ils ont le même nombre de trous, mais ils sont très différents



Le deuxième est plus « grand »



Mais le premier est plus « épais »



On définit deux *mesures* pour les trous

Structure

1 Introduction

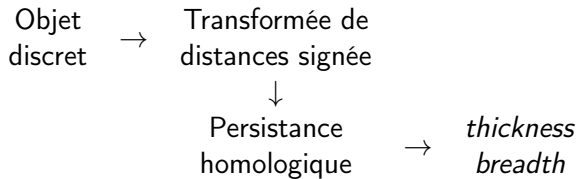
- Homologie
- Problématique

2 Les mesures

- Définition
- Applications

3 Vers les complexes simpliciaux

4 Conclusion



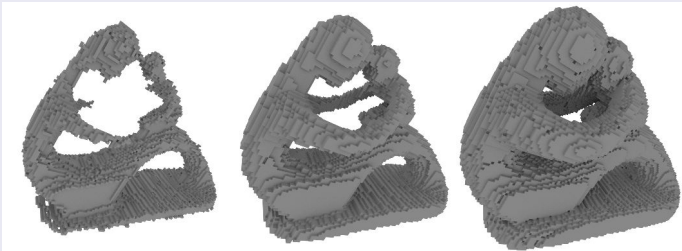
Transformée de distances signée

Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$,

$$tds_X(x) = \begin{cases} -d(x, X^c) & \text{si } x \in X \\ d(x, X) & \text{si } x \notin X \end{cases}$$



Persistence homologique

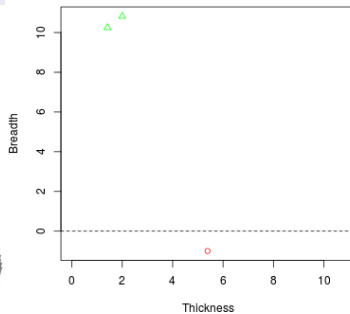
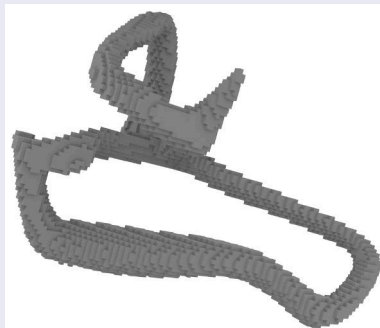


Les couples *thickness-breadth* :=

$$\{(x, y) \mid (-x, y) \in D(tds_X), -x < 0 < y\}$$

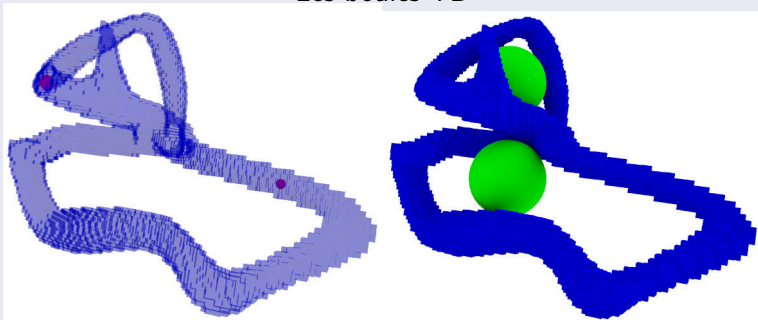
Application 1 : analyse d'objets

Le diagramme TB



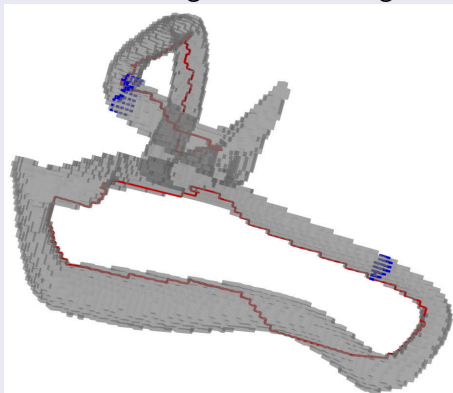
Application 2 : visualisation de trous

Les boules TB



Application 3 : petits générateurs*

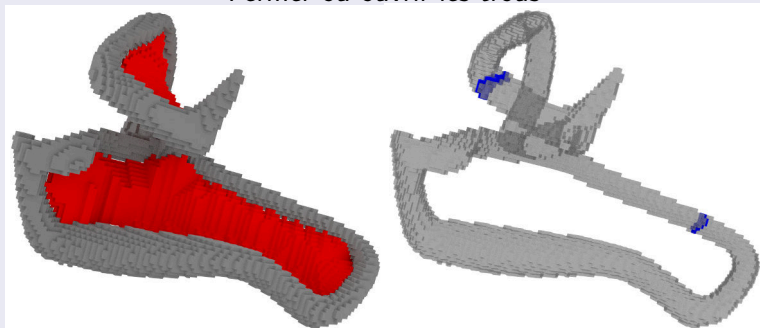
Générateurs d'homologie et cohomologie minimaux



* Heuristique

Application 4 : fermer ou ouvrir*

Fermer ou ouvrir les trous



* Heuristique

Structure

1 Introduction

- Homologie
- Problématique

2 Les mesures

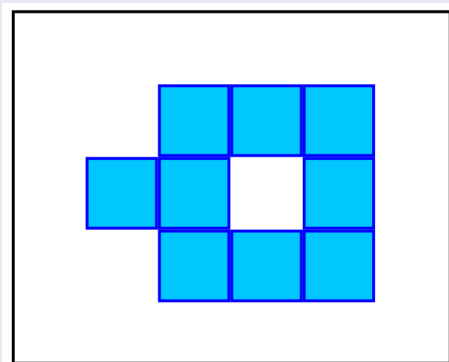
- Définition
- Applications

3 Vers les complexes simpliciaux

4 Conclusion

Rappel

Objet discret



Rappel

Objet discret $\longrightarrow tds_X$

$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1
$\sqrt{2}$	1	-1	-1	-1	1
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$

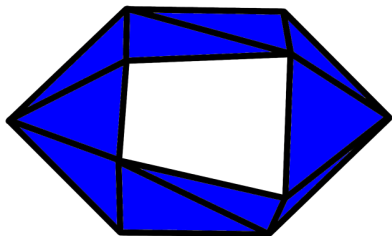
Rappel

Objet discret $\longrightarrow tds_X \longrightarrow$ complexe cubique

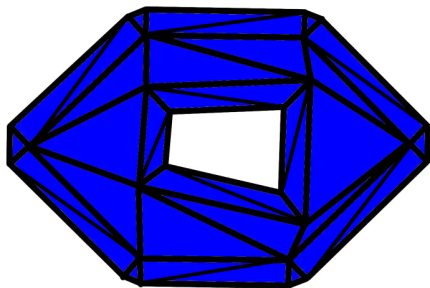
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\sqrt{2}$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

- On peut discrétiser la tds sur un complexe cubique
- Comment faire pour un complexe simplicial ? Morphologie mathématique ?

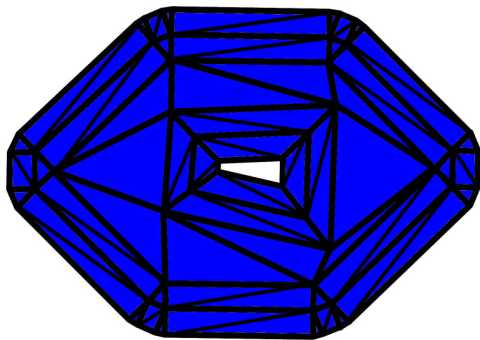
Comment dilater



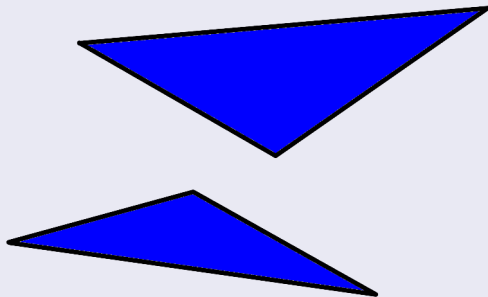
Comment dilater



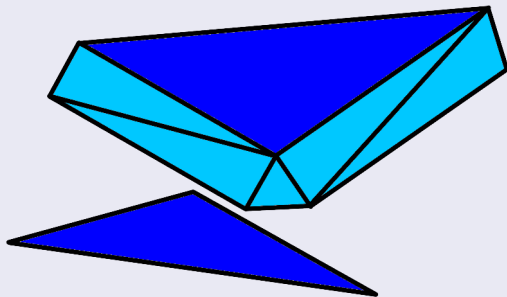
Comment dilater



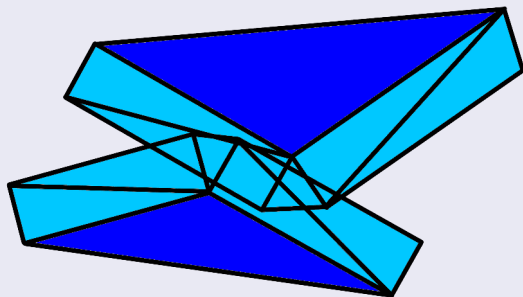
Problème 1 : chevauchement



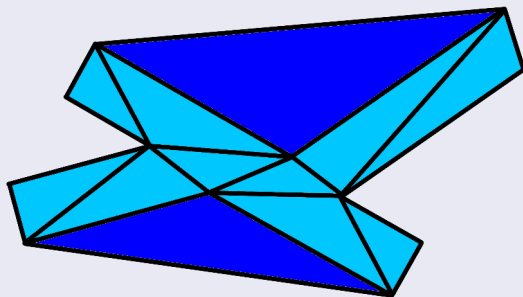
Problème 1 : chevauchement



Problème 1 : chevauchement

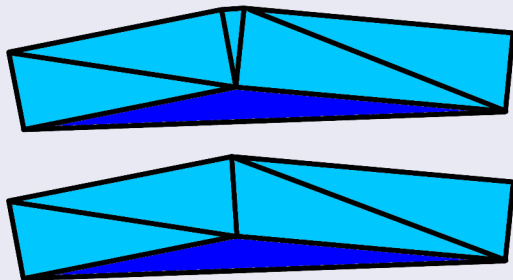


Problème 1 : chevauchement



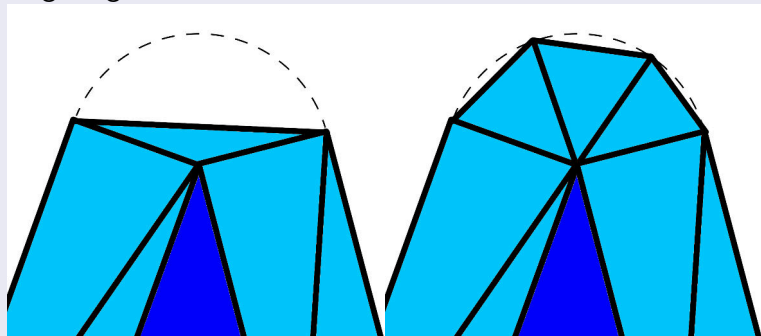
Problème 2 : angles

Angle obtus



Problème 2 : angles

Angle aigu



Structure

- 1 Introduction
 - Homologie
 - Problématique
- 2 Les mesures
 - Définition
 - Applications
- 3 Vers les complexes simpliciaux
- 4 Conclusion

- Les mesures *thickness* et *breadth* apportent une information géométrique pertinente sur les trous d'un objet
- Il faut un algorithme traitant les chevauchements de simplexes pour pouvoir calculer ces mesures sur un complexe simplicial

Vous pouvez télécharger cette présentation sur

<http://aldo.gonzalez-lorenzo.perso.luminy.univ-amu.fr/downloads.html>

Merci ! Questions ?