Quasipériodicité des mots biinfinis

Florian Barbero, Guilhem Gamard, Anaël Grandjean

19 mars 2019

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- p-**periodique :** $\mathrm{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

aba aba aba aba aba aba aba aba ...

- q-**quasipériodique :** w couvert d'occurrences de q

abaaabaabaaabaabaabaa ...

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- *p*-**periodique :** $\mathrm{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

$$aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\ldots$$

- q-**quasipériodique :** w couvert d'occurrences de q

$$\overbrace{abaa}abaabaaabaabaabaa\ \ldots$$

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- *p*-**periodique :** $\mathbf{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

$$aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba \ldots$$

- $\mathbf{q}$-**quasipériodique :** $\mathbf{w}$ couvert d'occurrences de q

$$\overbrace{abaa}\underbrace{abaa}baaabaabaabaa \ldots$$

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- ***p*-periodique :** $\mathbf{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

$$aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba\ aba \ldots$$

- **q-quasipériodique :** $\mathbf{w}$ couvert d'occurrences de q

$$abaaabaabaaabaabaabaa\ \ldots$$

Quasipériodicité

- Σ = alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- *p*-**periodique :** $\mathbf{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

$$aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba \ldots$$

- $\mathbf{q}$-**quasipériodique :** $\mathbf{w}$ couvert d'occurrences de q

$$abaaabaabaaabaabaabaa \ldots$$

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- *p*-**periodique :** $\mathrm{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini p

$$aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\,aba\ldots$$

- q-**quasipériodique :** w couvert d'occurrences de q

$$abaaabaabaaabaabaabaa\ \ldots$$

Quasipériodicité

- $\Sigma =$ alphabet fini
- $\mathbf{w} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$
- *p*-**periodique :** $\mathbf{w} = p \cdot p \cdot p \cdots$ pour un mot fini *p*

$$aba\, aba\, aba\, aba\, aba\, aba\, aba\, aba \ldots$$

- $\mathbf{q}$-**quasipériodique :** $\mathbf{w}$ couvert d'occurrences de *q*

$$abaaabaabaaabaabaabaa \ldots$$

Historique

- Algorithmique du texte [Apostolico Ehrenfeucht, 1993] [Mouchard, 2000]
- **Mots infinis** [Marcus, 2000] [Levé Richomme, 2004, 2007, 2013] [Glen Levé Richomme, 2008]
- **Systèmes dynamiques** [Marcus Monteil, 2006]

- Pavages [Gummelt, 1992]
- Mots 2D [G. et Richomme, 2015]

Chevauchements

Remarque

Le mot $\mathbf{w}$ est *abaa*-quasipériodique ssi $\mathbf{w} \in \{abaa, aba\}^{\omega}$.

$$abaa\ aba\ abaa\ aba\ aba\ abaa \ldots$$

Chevauchements

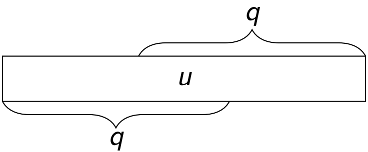
Remarque

Le mot $\mathbf{w}$ est *abaa*-quasipériodique ssi $\mathbf{w} \in \{abaa, aba\}^\omega$.

$$abaa\ aba\ abaa\ aba\ aba\ abaa \dots$$

Définition

Le mot *u* **chevauchement** du mot *q* ssi
q est préfixe et suffixe de *u*, et $|u| \leq 2|q|$.



Chevauchements

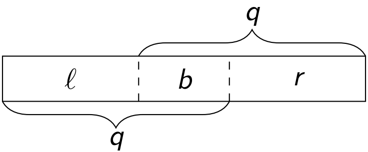
Remarque

Le mot $\mathbf{w}$ est *abaa*-quasipériodique ssi $\mathbf{w} \in \{abaa, aba\}^{\omega}$.

$$abaa\ aba\ abaa\ aba\ aba\ abaa \ldots$$

Définition

Le mot u **chevauchement** du mot q ssi
q est préfixe et suffixe de u, et $|u| \leq 2|q|$.



Bijection entre **chevauchements** et **bords** de q. On a $q = \ell b = br$.

Formes normales quasipériodiques

Théorème (Mouchard 2000)

Soit $q \in \Sigma^*$. Appelons $(r_i), (\ell_i)$ et (b_i) tous les mots tels que :

$$q = \ell_i b_i = b_i r_i.$$

Alors $\mathbf{w}$ est q-quasipériodique ssi $\mathbf{w} \in \{\ell_1, \dots, \ell_k\}^\omega$,
ssi $\mathbf{w} \in q \cdot \{r_1, \dots, r_k\}^\omega$.

Formes normales quasipériodiques

Théorème (Mouchard 2000)

Soit $q \in \Sigma^*$. Appelons $(r_i), (\ell_i)$ et (b_i) tous les mots tels que :

$$q = \ell_i b_i = b_i r_i.$$

Alors $\mathbf{w}$ est q-quasipériodique ssi $\mathbf{w} \in \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}^\omega$,
ssi $\mathbf{w} \in q \cdot \{r_1, \ldots, r_k\}^\omega$.

Le mot $\mathbf{x}$ est une q-**forme normale** de $\mathbf{w}$ ssi

$$\mathbf{w} = \ell_{\mathbf{x}(0)} \ell_{\mathbf{x}(1)} \ell_{\mathbf{x}(2)} \ell_{\mathbf{x}(3)} \cdots$$

La forme normale est unique ssi q n'est pas quasipériodique.

Quasipériodique n'implique «rien»

Prenez votre "mauvais mot" $\mathbf{w}$ préféré :

- Non-uniformément récurrent
- Grande complexité en facteurs
- Pas de fréquences pour les facteurs
- Haut degré de Turing
- ...

et prenez son image par le morphisme :

$$a \mapsto abaa \quad b \mapsto aba$$

vous obtenez un "mauvais mot quasipériodique".

[Marcus Monteil, 2006]

Quasipériodique n'implique «rien»

Remarque

Si q est un mot fini avec k chevauchements, $\forall \mathbf{x} \in \{0, \ldots, k-1\}^\omega$, alors $\mathbf{x}$ est la forme normale d'un mot q-quasipériodique.

Définition

L'opération « prendre la forme normale » s'appelle la **dérivation.** L'opération inverse s'appelle parfois l'**intégration.**

La dérivation et l'intégration préservent beaucoup de propriétés.

On peut intégrer un mauvais mot avec n'importe quel q.

Une notion plus forte...

Définition (Marcus, Monteil 2006)

Un mot est **quasipériodique multi-échelles** s'il a une infinité de quasipériodes.

Exemples :

- Périodiques
- Point fixe de $a \mapsto abaa, b \mapsto aba$ (ou d'une autre intégration)
- La plupart des mots sturmiens [Levé Richomme, 2004]

... avec de bonnes propriétés dynamiques

Théorème (Marcus Monteil, 2006)

Soit $\mathbf{w}$ *un mot multi-échelles, alors* $\mathbf{w}$*:*

- *est uniformément récurrent,*
- *a des fréquences pour ses facteurs,*
- *a entropie topologique* 0*.*

... avec de bonnes propriétés dynamiques

Théorème (Marcus Monteil, 2006)

Soit $\mathbf{w}$ *un mot multi-échelles, alors* $\mathbf{w}$*:*

- *est uniformément récurrent,*
- *a des fréquences pour ses facteurs,*
- *a entropie topologique* 0*.*

Plus précisément : $P_{\mathbf{w}}(n) \leq n^2$ pour une infinité de n.

… avec de bonnes propriétés dynamiques

Théorème (Marcus Monteil, 2006)

Soit $\mathbf{w}$ *un mot multi-échelles, alors* $\mathbf{w}$*:*

- *est uniformément récurrent,*
- *a des fréquences pour ses facteurs,*
- *a entropie topologique* 0*.*

Plus précisément : $P_{\mathbf{w}}(n) \leq n^2$ pour une infinité de n.

Question ouverte : quelle est la borne optimale ?

Trouver les quasipériodes d'un mot

Il y a un algo efficace pour trouver les quasipériodes d'un mot **fini.**
[Apostolico Ehrenfeucht, 1993]

Problème : déterminer l'ensemble de quasipériodes d'un mot infini.

Question (Marcus, 2004)

Que peut-on dire de l'ensemble de quasipériodes d'un mot arbitraire ?

Trouver les quasipériodes d'un mot

Il y a un algo efficace pour trouver les quasipériodes d'un mot **fini.**
[Apostolico Ehrenfeucht, 1993]

Problème : déterminer l'ensemble de quasipériodes d'un mot infini.

Question (Marcus, 2004)

Que peut-on dire de l'ensemble de quasipériodes d'un mot arbitraire ?

Remarque

Toutes les quasipériodes d'un mot infini $\mathbf{w}$ sont des **préfixes** de $\mathbf{w}$.

Enlarge your quasiperiods !

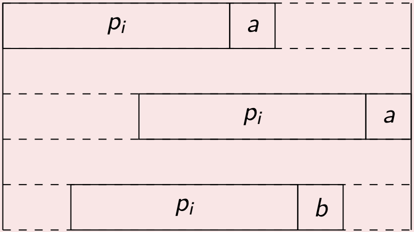
Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n sont préfixe de longueur n.

Proposition (G. et Richomme, 2016)

Supposons que p_i est une quasipériode de $\mathbf{w}$;
alors p_{i+1} est quasipériode ssi p_i **n**'est **pas** spécial droit.

Démonstration.

Si p_i n'est pas spécial droit, toute occurrence de p_i s'étend en p_{i+1}.
Supposons $p_{i+1} = p_i a$ quasipériode et $p_i b$ facteur de $\mathbf{w}$.



Enlarge your quasiperiods !

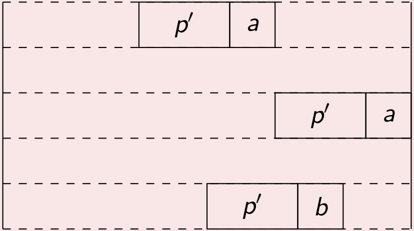
Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n sont préfixe de longueur n.

Proposition (G. et Richomme, 2016)

Supposons que p_i est une quasipériode de $\mathbf{w}$;
alors p_{i+1} est quasipériode ssi p_i **n**'est **pas** spécial droit.

Démonstration.

Si p_i n'est pas spécial droit, toute occurrence de p_i s'étend en p_{i+1}.
Supposons $p_{i+1} = p_i a$ quasipériode et $p_i b$ facteur de $\mathbf{w}$.



Enlarge your quasiperiods !

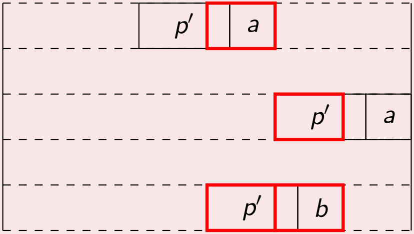
Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n sont préfixe de longueur n.

Proposition (G. et Richomme, 2016)

Supposons que p_i est une quasipériode de $\mathbf{w}$;
alors p_{i+1} est quasipériode ssi p_i **n**'est **pas** spécial droit.

Démonstration.

Si p_i n'est pas spécial droit, toute occurrence de p_i s'étend en p_{i+1}.
Supposons $p_{i+1} = p_i a$ quasipériode et $p_i b$ facteur de $\mathbf{w}$.



Diminution de quasipériodes

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n sont préfixe de longueur n.

Proposition (G. et Richomme, 2016)

Supposons que p_i est une quasipériode $\mathbf{w}$;
alors p_{i-1} **n**'est **pas** quasipériode ssi

- $(p_i)^2$ facteur de $\mathbf{w}$, et
- p_{i-1} n'est pas facteur interne de $p_i p_{i-1}$

Diminution de quasipériodes

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n sont préfixe de longueur n.

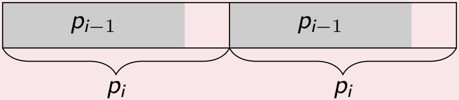
Proposition (G. et Richomme, 2016)

Supposons que p_i est une quasipériode $\mathbf{w}$;
alors p_{i-1} **n**'est **pas** quasipériode ssi

- $(p_i)^2$ facteur de $\mathbf{w}$, et
- p_{i-1} n'est pas facteur interne de $p_i p_{i-1}$

Démonstration.

Voici la seule situation où p_{i-1} n'est pas quasipériode :



sans autre occurrence de p_{i-1}. □

Déterminer les quasipériodes

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et p_n son préfixe de longueur n.

Méthode

- Toutes les quasipériodes sont des p_i.
- Lorsque p_i est quasipériode, on sait tester si p_{i+1} et p_{i-1} le sont.

- Répond à la question de Marcus
- Plan d'attaque pour déterminer l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini

(Contre-)exemples divers

Proposition (G. et Richomme, 2016)

Il existe des mots multi-échelles :

1. dont aucune forme normale n'est quasipériodique ;
2. dont nulle quasipériode n'est quasipériodique ;
3. tel que q_{n+1} est q_n-quasipériodique pour tout n.

Exemple

Pour ①, prendre $h^\omega(a)$ avec :

$$h(a) = aba\,aba$$
$$h(b) = ba\,ba\,ba$$

Périodicité vs quasipériodicité

Théorème (G. et Richomme, 2016)

Un mot $\mathbf{w}$ *est périodique ssi*
$\exists n$ *t.q. tous les préfixes plus longs que* n *sont des quasipériodes.*

Démonstration.

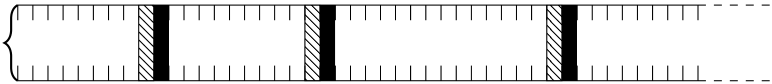
1. Périodique $\implies$ tous les préfixes assez longs sont des quasipériodes
2. Réciproque : pas de préfixes spéciaux droits plus longs que la période

$\square$

Ensemble maximal de quasipériodes ?

Idée 1 : l'extension d'un préfixe spécial droit n'est jamais une quasipériode

Idée 2 : dans les mots apériodiques, une infinité de préfixes **ne** sont **pas** des quasipériodes.



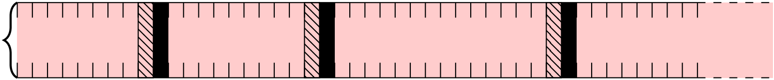
$\{\cdots$ ▨ $=$ spécial droit

$\{\cdots$ ▮ $=$ **jamais** quasipériode

Ensemble maximal de quasipériodes ?

Idée 1 : l'extension d'un préfixe spécial droit n'est jamais une quasipériode

Idée 2 : dans les mots apériodiques, une infinité de préfixes **ne** sont **pas** des quasipériodes.



$\{\cdots$ = spécial droit

$\{\cdots$ = **jamais** quasipériode

$\{\cdots$ = quasipériode

Cette situation est-elle possible ?
Y a t-il un mot apériodique avec un ensemble «maximal» de quasipériodes ?

Surprise

Réponse : oui.

Surprise

Réponse : oui.

Définition

Le mot infini $\mathbf{w}$ a un **ensemble maximal de quasipériodes** ssi :
p_{i+1} quasipériode $\iff$ p_i n'est pas spécial droit

Théorème (G. et Richomme, 2016)

Les mots apériodiques avec un ensemble maximal de quasipériodes sont exactement les sturmiens standard.

Dynamique symbolique

On peut munir l'ensemble $\Sigma^{\mathbb{N}}$ d'une topologie.
(Topologie produit des topologies discrètes sur Σ.)

L'opération $\sigma(\mathbf{w})$ qui décale un mot vers la droite :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3\dots \\ \sigma(\mathbf{w}) &= \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3\mathbf{w}_4\dots \end{aligned}$$

est continue pour cette topologie.

$(\Sigma^{\mathbb{N}}, \sigma)$ est un système dynamique discret : le **full shift.**
Les fermés de Σ^n stables par σ sont appelés des **subshifts.**

Subshifts quasipériodiques

On aurait envie d'écrire «un subshift X est quasipériodique si tous les mots qu'il contient le sont».

Problème : la quasipériodicité n'est pas stable par σ!

Solution : considérer des mots biinfinis. On peut munir $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ d'une topologie, et définir σ comme le décalage vers la gauche :

$$\sigma(\mathbf{w})_n = \mathbf{w}_{n+1}$$

En biinfini, σ préserve la quasipériodicité.

Cas biinfini : difficultés

Remarque

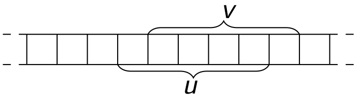
Si $\mathbf{w}$ est un mot infini à droite, toute quasipériode de $\mathbf{w}$ est un préfixe.

- Au plus un préfixe de chaque longueur.
- Tous les préfixes commencent au même endroit.

Tout ceci n'est plus vrai si $\mathbf{w}$ est un mot biinfini :-(

Prédecesseur, successeur

Soit $\mathbf{w}$ un mot biinfini et u, v des facteurs de $\mathbf{w}$ avec $|u| = |v|$.



Définition

On dit que v est **successeur** de u si v apparaît en position $n+1$ et u en position n dans $\mathbf{w}$, pour un certain n.

Inversement, u est **prédecesseur** de v.

Le *graphe de Rauzy* est le graphe de la relation *successeur* pour les facteurs d'une longueur donnée.

Quasipériodes de même longueur

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et q une quasipériode de $\mathbf{w}$.

Théorème (Barbero G. Grandjean, 2019)

1. *Si q a plusieurs successeurs, aucun de ses successeurs n'est quasipériode.*
2. *Si q a un seul successeur, il est toujours une quasipériode.*

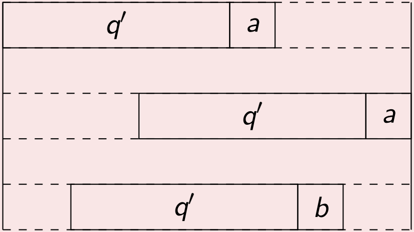
De même pour les prédécesseurs.

Quasipériodes de même longueur

Démonstration.

Si q possède un seul successeur, ce dernier est quasipériode.

Soit $q = cq'$ pour une lettre c.
Supposons $q'a$ quasipériode et $q'b$ facteur de $\mathbf{w}$. Alors :



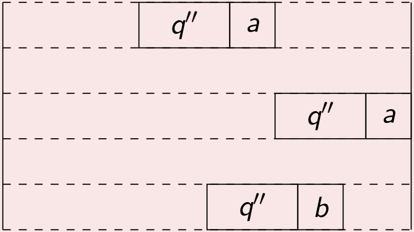
$\square$

Quasipériodes de même longueur

Démonstration.

Si q possède un seul successeur, ce dernier est quasipériode.

Soit $q = cq'$ pour une lettre c.
Supposons $q'a$ quasipériode et $q'b$ facteur de $\mathbf{w}$. Alors :



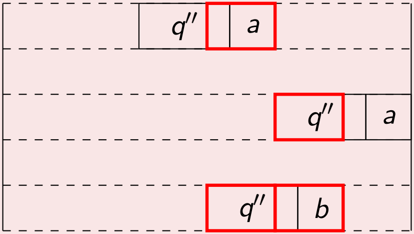
$\square$

Quasipériodes de même longueur

Démonstration.

Si q possède un seul successeur, ce dernier est quasipériode.

Soit $q = cq'$ pour une lettre c.
Supposons $q'a$ quasipériode et $q'b$ facteur de $\mathbf{w}$. Alors :



□

Quasipériodes des mots sturmiens

Soit $\mathbf{w}$ un mot sturmien biinfini et n un entier.

Théorème (Barbero G. Grandjean, 2019)

1. *Le mot $\mathbf{w}$ n'a aucune quasipériode de longueur n ssi il a un facteur bispécial non-vide de longueur $n-1$.*
2. *Autrement, soit s le plus petit facteur bispécial avec $|s| \geq n$,*

$$\mathit{Facteurs}(s, n) = \mathit{Quasipériodes}(\mathbf{w}, n)$$

Quasipériodes des mots sturmiens

Soit $\mathbf{w}$ un sturmien biinfini avec un facteur bispécial de longueur $n-1$.
$(*)$ Montrons qu'il n'a pas de quasipériode de longueur n.

Remarque

Si $\mathbf{w}$ a une quasipériode de longueur n, alors $\mathbf{w}$ a une quasipériode spéciale droite de longueur n. (C'est le théorème des successeurs !)

Démonstration de $(*)$.

- Le mot sturmien $\mathbf{w}$ a un seul spécial droit de chaque longueur.
- Soit s le facteur bispécial de longueur $n-1$.
- Soit as le facteur spécial droit de longueur n.
- Le mot $\mathbf{w}$ n'a pas d'autre facteur spécial droit de longueur n.
- Si $\mathbf{w}$ a une quasipériode de longueur n, alors as est quasipériode.
- Une quasipériode ne peut pas être continuation d'un spécial gauche.

□

Quasipériodes des mots sturmiens

Soit $\mathbf{w}$ un sturmien biinfini sans facteur bispécial de longueur $n-1$.
$(*)$ Montrons qu'il a une quasipériode de longueur n.

1. Quasipériodicité
2. Déterminer l'ensemble des quasipériodes
3. Passage au cas biinfini
4. Un algorithme pour la compatibilité
5. La fin

Compatibilité ?

Soient q, r deux mots **finis** de même longueur.

Soient Q et R les ensembles de mots biinfinis q-quasipériodiques et r-quasipériodiques, respectivement.

Question

Étant donnés q et r, dans quel cas sommes-nous ?

- $Q \subseteq R$
- $Q \cap R = \emptyset$
- $Q \cap R \neq \emptyset$ et $Q \Delta R \neq \emptyset$?

Motivation : construire des mots quasipériodiques

Quelques notions

Soient q, r deux mots **finis** de même longueur.

Soient Q et R les ensembles de mots biinfinis q-quasipériodiques et r-quasipériodiques, respectivement.

Définition

Le couple (q, r) est :

- **compatible** ssi l'ensemble $Q \cap R$ est non-vide
- **synchronisé** ssi dans tout mot de $Q \cap R$, les formes normales selon q et r sont les mêmes
- **abondant** ssi tout mot de Q contient une infinité de r

La réponse

Rappel

- **compatible** ssi l'ensemble $Q \cap R$ est non-vide
- **synchronisé** ssi dans tout mot de $Q \cap R$, les formes normales selon q et r sont les mêmes
- **abondant** ssi tout mot de Q contient une infinité de r

Théorème (Barbero G. Grandjean, 2019)

- *$Q \cap R = \emptyset$ ssi (q, r) est non-compatible*
- *$Q \subseteq R$ ssi (q, r) est synchronisé et abondant*
- *$Q \cap R \neq \emptyset$ et $R \Delta Q \neq \emptyset$ ssi (q, r) est compatible, mais non-abondant ou non-synchronisé*

Testable par un algorithme

Notations pour les chevauchements

Définition

Soit $\mathcal{V}_q(m)$ le chevauchement de q de longueur $2|q| - m$, s'il existe.

Soit $\mathcal{V}_q(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ le recollement de $\mathcal{V}_q(n_1), \mathcal{V}_q(n_2), \ldots, \mathcal{V}_q(n_k)$ selon q.

$$\mathcal{V}_{aba}(0, 1, 0, 0) = aba\,aba\,ba\,aba\,aba = \mathcal{V}_{aba\,aba}(1, 3)$$

Notation

Si $|\mathcal{V}_q(n_1, \ldots, n_k)|_q = k + 1$, on écrit $\mathcal{V}_q^*(n_1, \ldots, n_k)$.

$f_{q,r}$

Soient q, r des mots finis de même longueur et m, n des entiers.

Si $\mathcal{V}_q^*(m)$ existe et contient r comme facteur, on pose $\mathrm{occ}(q, r, m) =$ la position de r dans $\mathcal{V}_q^*(m)$.

Lemme

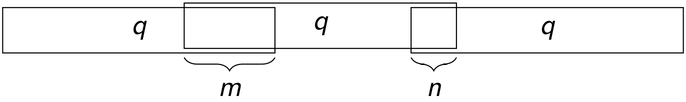
La quantité $\mathrm{occ}(q, r, m)$ est bien définie :
$\mathcal{V}_q^*(m)$ contient au plus une copie de chacun de ses facteurs internes.

Définition

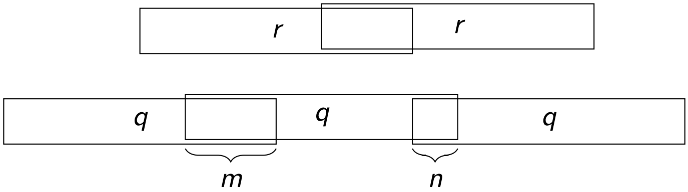
Si $\mathrm{occ}(q, r, m)$ et $\mathrm{occ}(q, r, n)$ existent, on pose :

$$f_{q,r}(m, n) = m + \mathrm{occ}(q, r, m) - \mathrm{occ}(q, r, n)$$

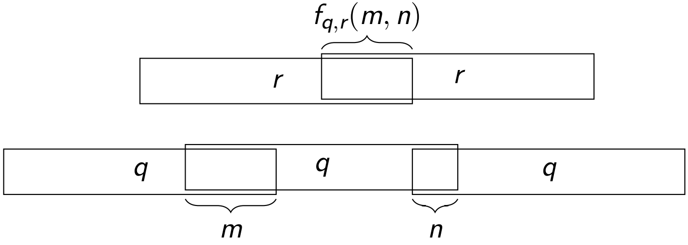
Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



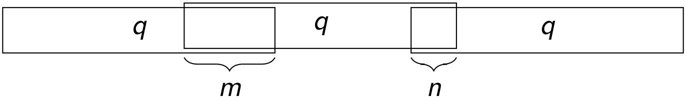
Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



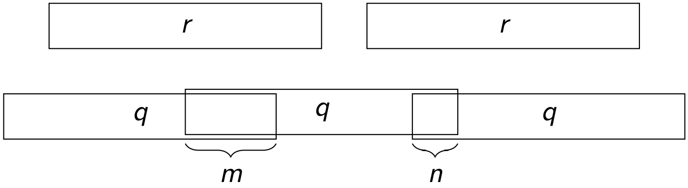
Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



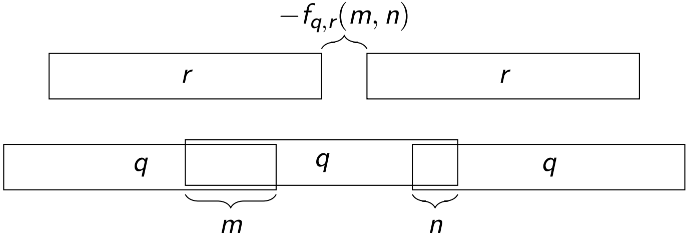
Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



Observons $\mathcal{V}_q^*(m, n)$.



Calculer $f_{q,r}$

Si $m > |q|$ ou $n > |q|$, alors $f_{q,r}(m,n)$ n'est pas définie.

Autrement, on peut tester si $f_{q,r}(m,n)$ est définie et la calculer en temps $O(|q|)$.

Algorithme

- Construire $\mathcal{V}_q^*(m,n)$
  - S'il n'existe pas, renvoyer `undefined`
- Soient k, ℓ les les positions de r dans $\mathcal{V}_q^*(m,n)$
  - S'il y en a moins de deux, renvoyer `undefined`
- Renvoyer $m + \ell - k$

Soient q, r deux mots finis de même longueur.

Théorème (Barbero G. Grandjean, 2019)

Le couple (q, r) est :

- ***compatible*** *si $f_{q,r}(m, n)$ est définie sur au moins un couple (m, n);*
- ***abondant*** *si $f_{q,r}(m, n)$ est défini dès que $\mathcal{V}_q^*(m, n)$ l'est ;*
- ***synchronisé*** *s'il est compatible et si $f_{q,r}$ est positive (ou nulle) là où elle est définie.*

Testable en $O(|q|^3)$: calculer $f_{q,r}(m, n)$ pour $0 \leq m, n \leq |q|$.
Donne immédiatement si $Q \subseteq R$, ou $Q \cap R = \emptyset$, ou rien.

La fin

- En infini à droite : déterminer les quasipériodes
- Biinfini souhaitable pour la dynamique
- Quasipériodes des mots sturmiens biinfinis
- Conditions et algorithmes de compatibilité

Merci !