Structures dans les sphères de chanfrein
Structures in chamfer spheres

Eric Remy Edouard Thiel

Laboratoire d'Informatique de Marseille

LIM, Case 901, 163 av Luminy, 13288 Marseille cedex 9

{Eric.Remy, Edouard.Thiel}@lim.univ-mrs.fr

Résumé

Les distances de chanfrein sont largement utilisées en analyse d'image, et leur propriétés sont bien établies en 2 dimensions. Nous proposons dans cet article une étude des masques de chanfrein en 3 dimensions, dont les fondements théoriques sont plus complexes. Le but est de faire apparaître ces nouvelles structures et leurs propriétés, qui s'appuient sur les triangulations de points visibles dans les ensembles de Farey. On définit les déplacements élémentaires et les cônes d'influence, et on se ramène à une boule rationnelle équivalente. Par une contrainte de convexité sur la boule, on montre dans quelles conditions un masque de chanfrein induit une distance ; la sphère de chanfrein est alors un polyèdre discret. Enfin nous présentons quelques exemples.

Mots-Clé

Distances de chanfrein, ensembles de Farey, géométrie discrète.

Abstract

Chamfer distances are widely used in image analysis, and their properties are well established in 2 dimensions. In this paper, we propose a study of chamfer masks in 3 dimensions, which theoretical foundations are more complex. We aim at disclosing these new structures and their properties, which are based on visible points triangulations and on Farey sets. We define elementary displacements and influence cones, and then introduce an equivalent rational ball. With a convexity constraint on the ball, we show in which conditions a chamfer mask induces a distance; the chamfer sphere is then a discrete polyhedron. Finally we present some examples.

Keywords

Chamfer distances, Farey sets, discrete geometry.

1 Introduction

En analyse d'images, plus précisément en représentation et description de formes, on a besoin de notions de la géométrie discrète telle que la notion de distance discrète, qui est utile pour mesurer et décrire les objets présents dans l'image. Les distances de chanfrein, encore appelées distances pondérées, sont des distances discrètes largement utilisées, par exemple pour le calcul de squelettes réversibles [9, 2], pour séparer des objets accolés, pour interpoler deux objets, pour calculer le graphe de Voronoï généralisé, ou encore pour remplir des trous dans des surfaces [1].

Une distance discrète est définie positive, symétrique et respecte l'inégalité triangulaire, le tout avec des nombres entiers. Le but est d'approximer la distance euclidienne d_E avec des entiers, de façon très efficace en terme de calcul et de stockage sur toute une image à la fois.

On peut définir les distances de chanfrein de la façon suivante : le *masque de chanfrein* est un ensemble de déplacements autorisés dans un voisinage, chaque déplacement étant pondéré avec un coût entier ; la *distance de chanfrein* entre deux points est le coût du chemin de coût minimal les rejoignant, formé des déplacements autorisés par le masque. La notion de réseau est sous-jacente.

Le précurseur des distances pondérées est Montanari, qui fixe le coût d'un déplacement à sa norme euclidienne ; par exemple 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, etc ; il peut en théorie approximer d_E autant qu'il le souhaite [7]. Comme ces valeurs ne sont pas entières, Borgefors a proposé les poids $(3,4)$ et $(5,7,11)$, ce qui revient à approcher $(1,\sqrt{2})$ par $(1,4/3)$ et $(1,\sqrt{2},\sqrt{5})$ par $(1,7/5,11/5)$.

Borgefors popularise ces distances de chanfrein en dimension quelconque dans [4]. Par la suite de multiples méthodes d'optimisation sont proposées, la contribution majeure étant de Verwer en 2D et 3D [11]. On trouve un historique complet des distances de chanfrein, la comparaison des méthodes d'optimisation et les formules de passage entre méthodes dans [10].

Les distances de chanfrein présentent de nombreux attraits, qui justifient leur succès dans les applications. Ce sont des distances locales, c'est-à-dire qui permettent de déduire une distance à partir des distances de voisins proches, contrairement à d_E. Le calcul de l'axe médian se fait également par un test local [10]. Tous les calculs se passent en nombres entiers et avec des opérations linéaires ($+$, $-$, $<$).

L'attrait principal est la grande rapidité — et la simplicité — de l'algorithme de transformation de distance, dû à Rosenfeld [8]. La transformation de distance, notée DT, consiste à étiqueter chaque point objet d'une image à sa distance au complémentaire. La transformation est globale, et l'algorithme de Rosenfeld la fait en 2 passes sur l'image, indépendamment de l'épaisseur des objets dans l'image, et quelle que soit la dimension. L'algorithme inverse permet de retrouver un objet à partir de son axe médian, également en 2 passes.

Un masque de chanfrein n'induit pas forcément une distance ; il faut respecter certaines conditions sur le choix des déplacements d'une part, et sur le choix des poids associés d'autre part. Avoir une distance est nécessaire d'un point de vue mathématique, et pour assurer la validité des algorithmes.

En 2 dimensions, nous avons établi les conditions exactes pour qu'un masque de chanfrein induise bien une distance dans [10]. Pour cela nous avons établi les propriétés arithmétiques et géométriques des boules de chanfrein, et dégagé les structures générales de cônes et de déplacements élémentaires. Ces résultats reposent sur les suites de Farey, qui sont relatives à la géométrie des nombres [6].

Nous proposons dans cet article une étude des boules de chanfrein en 3 dimensions, dont les structures sont encore plus riches. En effet, le passage de la $2^{ème}$ à la $3^{ème}$ dimension fait perdre l'ordre angulaire entre les points visibles, et la triangulation n'est plus unique. Notre but est donc de dégager toutes ces nouvelles structures, et de recenser les propriétés intéressantes ; les fondements en sont les ensembles et les triangulations de Farey [5].

Au §2 nous définissons l'espace de travail, le masque, la distance et la boule de chanfrein ; les points visibles sont introduits au §3 et les propriétés des ensembles de Farey au §4. Dans le §5 on étudie la géométrie de la boule, les déplacements élémentaires dans les cônes d'influence, et on se ramène à une boule rationnelle équivalente. Les contraintes exactes pour qu'un masque de chanfrein induise bien une distance sont établies au §6 avec un critère de convexité sur la boule. Enfin au §7 on illustre le calcul des contraintes sur 2 masques.

2 Définitions

2.1 Espace de travail

Notre espace de travail est le maillage cubique, que l'on associe au réseau fondamental Λ de $\mathbb{Z}^3$. Le maillage cubique implique la symétrie par rapport aux plans des axes et des bissectrices, appelée *48-symétrie* : elle découpe $\mathbb{Z}^3$ en 48 sous-espaces ($48 = 2^3.3!$ avec 2^3 combinaisons de signes et $3!$ permutations de coordonnées), contre 8 octants dans $\mathbb{Z}^2$. On note $\mathcal{S}$ le $48^{ème}$ d'espace

$$\mathcal{S} = \left\{ 0 \leq z \leq y \leq x \, , \; (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \right\} \qquad (1)$$

et on note $\mathcal{S}_n$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_n = \left\{ 0 \leq z \leq y \leq x \leq n \, , \; (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \right\} \; . \qquad (2)$$

Dans la suite on représentera principalement $\mathcal{S}$ avec la projection π (figure 1) :

$$\pi : (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \; . \qquad (3)$$

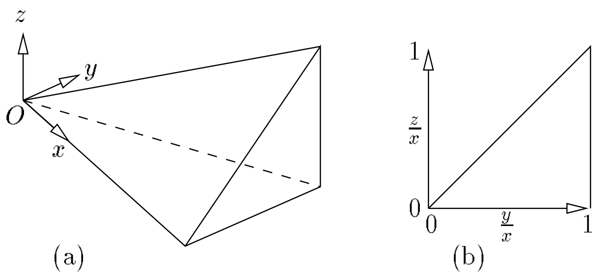

FIG. 1 – *Le $48^{ème}$ d'espace $\mathcal{S}$ (a) et la représentation en projection π (b).*

Par définition de $\mathcal{S}$, les bords du triangle vu en projection dans la figure 1.b sont les 3 plans passant par O tels que $z = y$, $z = 0$ et $y = x$, et l'intérieur du triangle est tel que $0 < z < y < x$ (figure 2.a). On se donne les symétries σ par rapport aux plans bordant $\mathcal{S}$, illustrées figure 2.b :

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,z,y) \\ \sigma_2 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \\ \sigma_3 : (x,y,z) & \longmapsto & (y,x,z) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \\ \sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \end{array} \qquad (4)$$

2.2 Masque et distance de chanfrein

Définition 1 (Pondération) *On appelle pondération $M(x,y,z,w)$ un point $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ muni d'un poids $w \in \mathbb{N}$.*

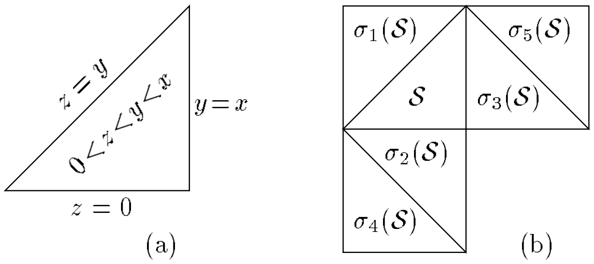

FIG. 2 – *Plans bordant $\mathcal{S}$ (a) et symétries associées (b) en projection.*

Un *masque de chanfrein* $\mathcal{M}$ consiste en un voisinage centré en O, de taille $(2N+1)^3$, dans lequel on autorise certains déplacements, que l'on pondère. Autrement dit, $\mathcal{M}$ est un ensemble 48-symétrique de m pondérations

$$\mathcal{M} = \{\, M_i(x_i, y_i, z_i, w_i)\,,\ 1 \leq i \leq m \,\} \qquad (5)$$

sur lequel on va rajouter par la suite certaines contraintes. On appelle *générateur* $\mathcal{M}^g$ d'un masque $\mathcal{M}$ la partie $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, de laquelle sont déduites toutes les autres pondérations par la 48-symétrie.

Étant donné un masque $\mathcal{M}$, un *chemin* $\mathcal{P}$ est une suite de k déplacements

$$\mathcal{P} = (M_{i_1}, \ldots, M_{i_k})\,, \quad 1 \leq i_j \leq m \qquad (6)$$

que l'on peut écrire de façon équivalente

$$\mathcal{P} = n_1 M_1 + \ldots + n_m M_m\,, \quad n_i \geq 0 \qquad (7)$$

en regroupant les déplacements identiques. Le *coût* $W(\mathcal{P})$ associé à ce chemin est

$$W(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} n_i w_i\,. \qquad (8)$$

Définition 2 (Distance de chanfrein) *La distance de chanfrein $d_\mathcal{M}$ entre 2 points A et B est le minimum des coûts associés à tous les chemins $\mathcal{P}$ reliant A à B :*

$$d_\mathcal{M}(A,B) = \min_{\mathcal{P}} W(\mathcal{P})\,, \quad \overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{AB}\,. \qquad (9)$$

Mais cette fonction $d_\mathcal{M}$ peut ne pas être une distance (par exemple, non respect de l'inégalité triangulaire) ; nous proposons donc d'établir les conditions strictes à partir de la géométrie de la boule de chanfrein.

2.3 Boule de chanfrein

La *boule de chanfrein* $B_\mathcal{M}$ de rayon $R \in \mathbb{N}$ est

$$B_\mathcal{M}(R) = \{\, p \in \mathbb{Z}^3 : d_\mathcal{M}(O,p) \leq R \,\} \qquad (10)$$

où R est un rayon arithmétique, différent du rayon en nombre de voxels. Nous verrons dans la suite que $B_\mathcal{M}$ est un polyèdre discret.

Pour observer les propriétés d'une boule d'un masque $\mathcal{M}$ à m pondérations, on peut générer une image de distance à l'origine, par la DT de Rosenfeld en 2 balayages, avec les 2 demi-masques avant et arrière de $\mathcal{M}$: on initialise dans une image I le centre $I[0,0,0]$ à 0 et tous les autres points à 1 ; après DT, la boule $B_\mathcal{M}(R)$ est l'ensemble des points de I inférieurs ou égaux à R.

Or toutes les propriétés de la boule peuvent être observées dans $\mathcal{S}$. On réduit donc DT à une transformation notée DT^g, qui ne fait qu'un seul balayage dans $\mathcal{S}$, avec seulement le générateur $\mathcal{M}^g$ (points numérotés $1 \ldots m^g$). Après DT^g, la partie de boule $B_\mathcal{M}(R) \cap \mathcal{S}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ inférieurs ou égaux à R dans I. Le calcul de DT^g est encore beaucoup plus rapide que celui de DT et plus économe en mémoire. On donne figure 3 l'algorithme complet de DT^g dans $\mathcal{S}_n$ (prendre n suffisamment grand pour contenir la boule).

Remarque : DT et DT^g ne sont équivalents dans $\mathcal{S}$ que si le masque $\mathcal{M}$ induit une distance. En effet, si une distance n'est pas induite, un plus court chemin peut faire des « zigzags », or DT^g ne propage pas de tels chemins.

Initialisation :
$I[0,0,0] = 0$
Balayage unique de $\mathcal{S}_n$ avec $\mathcal{M}^g$:
pour $x \in [1 \ldots n]$, $y \in [0 \ldots x]$, $z \in [0 \ldots y]$
faire | $w = +\infty$
  | pour $i \in [1 \ldots m^g]$
  | faire | $x' = x - x_i$; $y' = y - y_i$; $z' = z - z_i$
  | | si $(x', y', z') \in \mathcal{S}$
  | | alors si $I[x', y', z'] + w_i < w$
  | | alors $w = I[x', y', z'] + w_i$
  | $I[x, y, z] = w$

FIG. 3 – *Calcul rapide de la boule par* DT^g *dans* $\mathcal{S}_n$*.*

3 Points visibles

Définition 3 (Point visible) *Un point $P(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ est dit visible (i.e visible depuis l'origine) s'il n'y a aucun point du réseau fondamental qui soit situé sur (OP) entre O et P. Une condition nécessaire et suffisante est* $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$ [6].

Dans un masque de chanfrein, une pondération (x,y,z,w) engendre par translation les *périodes* $(2x, 2y, 2z, 2w)$, $(3x, 3y, 3z, 3w)$, etc. Pour des raisons évidentes d'efficacité dans les transformations de distances, un masque de chanfrein n'est donc constitué que de points visibles.

On peut exprimer le pgcd de 3 entiers par le pgcd de 2 entiers avec

$$\mathrm{pgcd}(x, y, z) = \mathrm{pgcd}(x, \mathrm{pgcd}(y, z)) \qquad (11)$$

de façon commutative ; on rappelle que par définition $\mathrm{pgcd}(x, 0) = x$; enfin on remarque que si x, y, z sont premiers et distincts, on a

$$\mathrm{pgcd}(xy, yz, zx) = 1 \qquad (12)$$

par (11) sans qu'aucun pgcd de deux de ces termes ne soit égal à 1.

3.1 Ensemble et couche

On note $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des points visibles de $\mathcal{S}_n$

$$\mathcal{V}_n = \{\, (x, y, z) \in \mathcal{S}_n : \mathrm{pgcd}(x, y, z) = 1 \,\} \qquad (13)$$

et on appelle *couche n* le sous-ensemble $\mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$.
On peut obtenir $\mathcal{V}_n$ avec un crible sur les périodes des points visibles, en faisant un balayage de $\mathcal{S}_n$ en x, y, z. Les points visibles sont numérotés v_0, v_1, v_2, ... dans l'ordre lexicographique de leur coordonnées x, y, z (qui est également l'ordre d'apparition dans le crible) ; les points de $\mathcal{V}_4$ sont nommés a, b, c, ..., v dans le même ordre. On donne figure 4 les coordonnées cartésiennes des points de $\mathcal{V}_4$, et dans la figure 5 on représente les points de $\mathcal{V}_4$ avec la projection π.

v_0	a	$(1,0,0)$
v_1	b	$(1,1,0)$
v_2	c	$(1,1,1)$
v_3	d	$(2,1,0)$
v_4	e	$(2,1,1)$
v_5	f	$(2,2,1)$

v_6	g	$(3,1,0)$
v_7	h	$(3,1,1)$
v_8	i	$(3,2,0)$
v_9	j	$(3,2,1)$
v_{10}	k	$(3,2,2)$
v_{11}	l	$(3,3,1)$
v_{12}	m	$(3,3,2)$

v_{13}	n	$(4,1,0)$
v_{14}	o	$(4,1,1)$
v_{15}	p	$(4,2,1)$
v_{16}	q	$(4,3,0)$
v_{17}	r	$(4,3,1)$
v_{18}	s	$(4,3,2)$
v_{19}	t	$(4,3,3)$
v_{20}	u	$(4,4,1)$
v_{21}	v	$(4,4,3)$

FIG. 4 – *Points visibles $\mathcal{V}_4$ (numéro, nom, coordonnées cartésiennes) regroupés par couches de x.*

3.2 Coordonnées barycentriques

Les trois premiers point visibles a, b, c forment une base de $\mathcal{S}$, dans laquelle on peut exprimer les coordonnées de chaque point visible

$$(x, y, z) = (x - y)\,\mathsf{a} + (y - z)\,\mathsf{b} + z\,\mathsf{c} \qquad (14)$$

en coordonnées barycentriques. On voit ainsi figure 6 que dans la couche 2, les points d, e, f sont situés au milieu de [a, b], [a, c] et [b, c] ; on peut continuer le raisonnement dans la couche 3, où g = a + d, h = a + e, i = d + b, k = e + c, l = b + f, m = f + c, et j = a + f = b + e = c + d. Ce phénomène est étroitement lié aux propriétés des points médians dans les ensembles de Farey, étudiés dans la partie suivante.

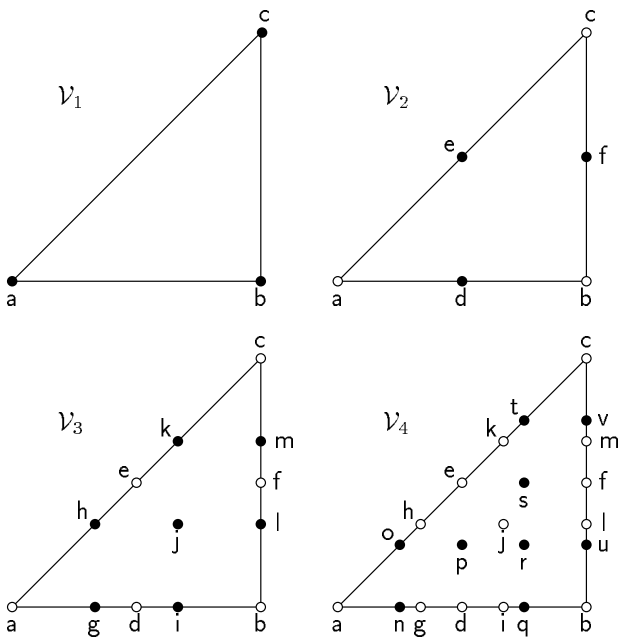

FIG. 5 – *Points visibles en projection (point • de $\mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$, point ∘ de $\mathcal{V}_{n-1}$).*

a	$(1,0,0)$	a
b	$(1,1,0)$	b
c	$(1,1,1)$	c
d	$(2,1,0)$	a + b
e	$(2,1,1)$	a + c
f	$(2,2,1)$	b + c
g	$(3,1,0)$	2a + b
h	$(3,1,1)$	2a + c
i	$(3,2,0)$	a + 2b
j	$(3,2,1)$	a+b+c
k	$(3,2,2)$	a + 2c
l	$(3,3,1)$	2b + c
m	$(3,3,2)$	b + 2c

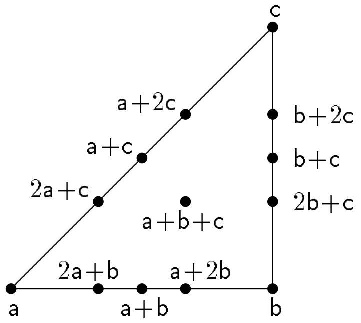

FIG. 6 – *Points visibles $\mathcal{V}_3$ en coordonnées barycentriques (nom, coordonnées cartésiennes, coordonnées barycentriques).*

4 Farey

4.1 Suites et ensembles

Les *suites de Farey F_n* sont les séries croissantes de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont le dénominateur n'excède pas n [6]. Elles sont l'élément théorique fondamental sur lequel reposent les propriétés et conditions de distance des masques de chanfrein en 2D [10]. Leur extension à $\mathbb{Q}^2$ sont les ensembles de Farey [5].

Définition 4 (Ensemble de Farey) *Les ensembles de Farey $\widehat{F}_n$ d'ordre n sont les ensembles de points irréductibles $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ entre $[0,0]$ et $[1,1]$ dont le dénominateur x n'excède pas n.*

Donc $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \widehat{F}_n$ si $x \leq n$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq x$, et si la forme est irréductible, i.e si $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$. Donc $(x,y,z) \in \mathcal{V}_n$ ou $(x,z,y) \in \mathcal{V}_n$ par (13), et par (4) il vient la correspondance avec les points visibles entre $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{Z}^3$

$$\widehat{F}_n = \left\{ \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) : (x,y,z) \in \mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n) \right\} . \quad (15)$$

L'application faisant correspondre (x,y,z) à $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ est la projection π, définie au §2.1 avec (3). La projection π est une bijection entre $\widehat{F}_n$ et $\mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n)$; en effet, $(x,y,z) \in \mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n)$ implique que $x,y,z \geq 0$, $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$ et de là $x > 0$, donc l'antécédent de tout $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \widehat{F}_n$ est unique dans $\mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n)$.

La notion de correspondance existe également entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^2$, avec un ordre que l'on n'a pas dans $\mathbb{Z}^3$: les suites de Farey, qui sont ordonnées croissantes, correspondent exactement aux points visibles triés dans l'ordre angulaire [10].

Les ensembles de Farey contiennent des suites de Farey. Dans $\pi(\mathcal{S})$, les suites sont situées sur les bords $z = 0$, $x = y$ et $y = z$, et sur la demi-diagonale $y + z = x$ (figure 7). Sur le bord $z = 0$ on a $\mathrm{pgcd}(x,y,0) = \mathrm{pgcd}(x,y) = 1$ et donc les $\left(\frac{y}{x}\right)$ forment une suite de Farey. Il en va de même avec les $\left(\frac{z}{x}\right)$ sur les bords $y = x$ et $z = y$. Enfin sur la demi-diagonale, on a une suite de Farey en 2 parties sur chacune des 2 fractions de $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Dans les autres parties de $\pi(\mathcal{S})$, on remarque que les fractions $\left(\frac{y}{x}\right)$ ou $\left(\frac{z}{x}\right)$ ne sont pas automatiquement irréductibles, en vertu de (12).

Pour tout point A de $\mathbb{Z}^3$ on note $\widehat{A} = \pi(A)$ le point correspondant de $\mathbb{Q}^2$. On définit l'opération $\widehat{+}$ dans $\mathbb{Q}^2$ par

$$\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \widehat{+} \left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}\right) = \left(\frac{y+y'}{x+x'}, \frac{z+z'}{x+x'}\right) . \quad (16)$$

Étant donné deux points $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de $\mathbb{Q}^2$, on appelle *point médian* de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ le point $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$. Par (16) on voit que $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$ correspond à $A + B$ de $\mathbb{Z}^3$, autrement dit

$$\pi(A)\widehat{+}\pi(B) = \pi(A+B) . \quad (17)$$

On remarque que $\mathcal{V}$ ne conserve pas l'addition : un contre-exemple est $(1,0,0) + (3,2,2) = (4,2,2) \notin \mathcal{V}$. Donc $\widehat{F}$ ne conserve pas l'opération $\widehat{+}$. On peut cependant établir un procédé de construction de $\widehat{F}_{n+1}$ à partir de $\widehat{F}_n$ et $\widehat{+}$, en faisant appel aux triangles réguliers.

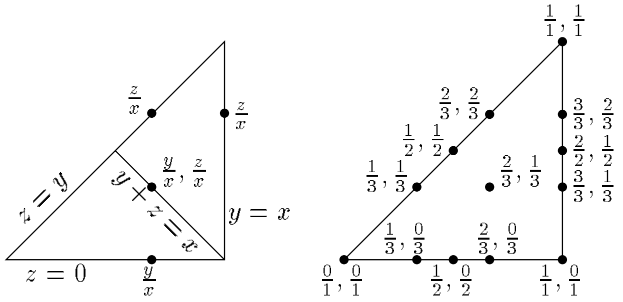

FIG. 7 – *Suites de Farey $F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ dans l'ensemble $\widehat{F}_3 \cap \pi(\mathcal{S})$.*

4.2 Triangulations

Considérons un triplet (Q,R,S) de points de $\mathbb{Z}^3$. On note $\Delta_{Q,R,S}$ l'entier relatif

$$\Delta_{Q,R,S} = \begin{vmatrix} x_Q & x_R & x_S \\ y_Q & y_R & y_S \\ z_Q & z_R & z_S \end{vmatrix} \quad (18)$$

qui est le volume signé du parallélépipède (O,Q,R,S) (cf §6.1).

Définition 5 (Triangle régulier) *On dit qu'un triplet (Q,R,S) de points de $\mathbb{Z}^3$ forme un triangle régulier si $\Delta_{Q,R,S} = \pm 1$.*

Un triangle régulier correspond à la notion de points *consécutifs* dans une suite de Farey, et possède les propriétés suivantes. On dit qu'un objet *contient* un point si le point est inclus dans l'intérieur, le bord ou les sommets de l'objet.

Théorème 1 (Minkowsky)
Le parallélépipède (O,Q,R,S) ne contient aucun point du réseau fondamental de $\mathbb{Z}^3$ autre que ses sommets ssi $\Delta_{Q,R,S} = \pm 1$ [6].

Donc lorsque 3 points visibles (Q,R,S) forment un triangle régulier, alors le parallélépipède (O,Q,R,S) ne contient aucun autre point visible (figure 8).

Lorsque 3 points sont consécutifs dans une suite de Farey, le second point est le médian des deux autres [6]. Dans les ensembles de Farey le théorème s'écrit :

Théorème 2 (Mönkemeyer)
Soit $(\widehat{Q}, \widehat{R}, \widehat{S})$ un triangle régulier de $\widehat{F}_n$. Soit $\widehat{P}$ un point de $\widehat{F}_{n+1}$, inclus dans le triangle et distinct des sommets ; alors $\widehat{P}$ est le médian de 2 des sommets [5].

On en déduit que ce point $\widehat{P}$ de $\widehat{F}_{n+1}$ est obligatoirement situé sur les bords du triangle régulier de $\widehat{F}_n$. Le théorème 2 explique donc la position des points visibles dans les couches à la figure 5, et le phénomène observé au §3.2 sur les coordonnées barycentriques.

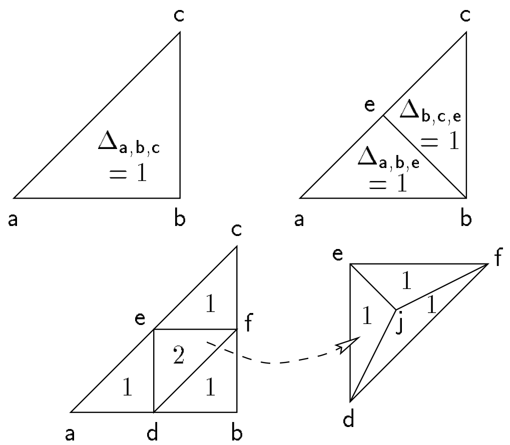

FIG. 8 – *Triangles réguliers (en projection) avec des points visibles. Le triplet* $(\mathsf{d},\mathsf{f},\mathsf{e})$ *n'est pas un triangle régulier puisque* $\Delta_{\mathsf{d},\mathsf{f},\mathsf{e}} = 2$ *; de fait le parallélépipède* $(O,\mathsf{d},\mathsf{f},\mathsf{e})$ *contient* j.

On appelle *triangulation de Farey* F_n^{Δ} l'ensemble de Farey $\widehat{F}_n$, muni d'une triangulation sur les points de $\widehat{F}_n$, telle que tous les triangles sont des triangles réguliers. La triangulation dans les suites de Farey est toujours unique ; dans un ensemble de Farey, elle n'est presque jamais unique. On dit qu'une séquence de triangulation de Farey est *compatible* si la triangulation de F_n^{Δ} est un raffinement de la triangulation de F_{n-1}^{Δ}.

Par le théorème 2 on a donc un procédé de construction de tout $\widehat{F}_{n+1}$ à partir d'un F_n^{Δ}. La figure 9 montre des exemples de triangulations compatibles.

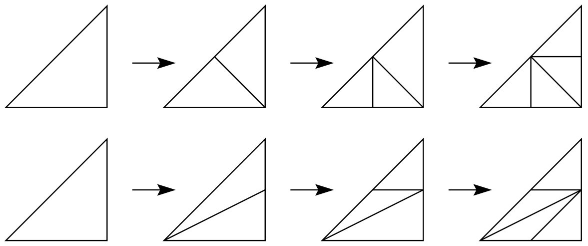

FIG. 9 – *Séquences compatibles de triangulations de Farey dans* $\widehat{F}_2$.

5 Géométrie de la boule

On étudie la structure de l'image de distance de la boule de chanfrein obtenue au §2.3.

5.1 Cône d'influence

On appelle *cône* (Q,R,S) le sous-espace de $\mathcal{S}$ délimité par les plans (O,Q,R), (O,R,S) et (O,S,Q). Un cône (Q,R,S) est dit *régulier* si le triangle (Q,R,S) est régulier.

Théorème 3 *Si un cône* (Q,R,S) *est régulier, alors tous les points du cône sont atteints par un chemin depuis* O*, constitué uniquement des déplacements* Q*,* R *et* S*.*

Preuve : Si le cône est régulier, selon le théorème 1, tous les points du parallélépipède (O,Q,R,S) peuvent être atteints depuis O par une combinaison linéaire entière de Q, R et S. Tout le cône peut être pavé de parallélépipèdes, donc tous les points du cône peuvent être atteints. Réciproquement, si le cône n'est pas régulier, il existe un point dans le parallélépipède qui est non atteint. □

Tout point P d'un cône régulier (M_i, M_j, M_k) est donc atteint depuis O par un chemin $n_i M_i + n_j M_j + n_k M_k$. Le coût de ce chemin est $W = n_i w_i + n_j w_j + n_k w_k$ par (8). La distance $d_{\mathcal{M}}(O,P)$ est égale à W si ce coût est le minimum des coûts de tous les chemins atteignant P. Dans ce cas, seules sont intervenues les pondérations M_i, M_j et M_k dans le calcul de la distance.

Définition 6 (Cône d'influence) *On appelle cône d'influence* (M_i, M_j, M_k) *un cône régulier dans lequel les seules pondérations* M_i*,* M_j *et* M_k *du masque interviennent dans le calcul de la distance à* O *en tout point du cône.*

La notion de cône d'influence est l'expression de l'inégalité triangulaire dans un réseau pondéré : un chemin du cône d'influence est le « plus direct » possible dans le réseau associé au masque.

5.2 Déplacements élémentaires

Définition 7 (Déplacement élémentaire) *On appelle déplacement élémentaire* dx*,* dy *ou* dz*, le coût d'un déplacement unitaire en* x*,* y *ou* z*, respectivement.*

Théorème 4
Dans un cône d'influence (M_i, M_j, M_k)*, les déplacements élémentaires sont constants dans tout le cône, et valent*

$$dx = \tfrac{1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix}, \quad dy = \tfrac{-1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ z_i & z_j & z_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix},$$

$$dz = \tfrac{1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Preuve : Nous montrons le théorème pour dx ; le raisonnement est le même pour dy et dz. Soit P et Q deux points du cône (M_i, M_j, M_k) tels que $\overrightarrow{PQ} = (1,0,0)$. Tous les points à l'intérieur du cône d'influence sont atteints par une combinaison linéaire entière de M_i, M_j et M_k ; donc la différence entre P et Q est indépendante de leur position, et donc dx est constant dans tout le cône d'influence. Dès lors, on cherche α, β, γ entiers tels que $\alpha M_i + \beta M_j + \gamma M_k = (1,0,0)$. On a

$$\alpha = \frac{1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} x_j & x_k & 1 \\ y_j & y_k & 0 \\ z_j & z_k & 0 \end{vmatrix}, \ \beta = \frac{-1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} x_i & x_k & 1 \\ y_i & y_k & 0 \\ z_i & z_k & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta_{i,j,k}} \begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 0 \\ z_i & z_j & 0 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

La valeur du déplacement élémentaire en x est $dx = \alpha w_i + \beta w_j + \gamma w_k$, d'où

$$dx = \frac{1}{\Delta_{i,j,k}} \left(w_i \begin{vmatrix} y_j & y_k \\ z_j & z_k \end{vmatrix} - w_j \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} + w_k \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix} \right) \tag{21}$$

qui est le développement par mineurs de (19). □

On remarque que si $\Delta_{i,j,k} \neq \pm 1$, alors les déplacements élémentaires peuvent ne pas être entiers. Au niveau de l'image de distance, les déplacements ne sont plus constants mais périodiques, et on retrouve ces valeurs en moyenne sur la période.

Dans la figure 10, on illustre les formules de calcul des déplacements élémentaires du théorème 4, sur des triangles réguliers de points visibles.

Triangle	dx	dy	dz
(a, b, c)	a	b − a	c − b
(a, b, e)	a	b − a	e − a − b
(b, c, e)	e − c	b + c − e	c − b
(a, d, e)	a	d − 2a	e − d
(d, b, e)	d − b	2b − d	e − d
(b, f, e)	b + e − f	f − e	f − 2b
(f, c, e)	e − c	f − e	2c − f

FIG. 10 – *Déplacements élémentaires dans des triangles réguliers.*

5.3 Polyèdre discret

Un corollaire important du théorème 4 est que l'intersection d'un cône d'influence avec sa boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ est

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz \leq R \tag{22}$$

qui est l'équation d'un demi-espace discret, dont la normale est $(dx,\, dy,\, dz)$. S'il existe un partitionnement du générateur du masque en cônes d'influence, alors la boule de chanfrein est un polyèdre discret.

Un tel partitionnement correspond par définition à une triangulation de Farey des pondérations du masque. Dans la partie §6, on détermine à partir d'une triangulation de Farey donnée, les contraintes exactes à appliquer sur les poids du masque, pour que la triangulation corresponde aux cônes d'influence effectifs.

5.4 Boule rationnelle équivalente

Étant donné un masque $\mathcal{M} = \{ M_i(x_i, y_i, z_i, w_i) \}$, on fixe l'entier $R = \prod_k w_k$, et on définit les points $M_i'' = \frac{R}{w_i} M_i$. Pour tout i on a

$$\frac{R}{w_i} = \frac{\prod_k w_k}{w_i} = \prod_{k \neq i} w_k \tag{23}$$

qui est un entier ; donc M_i'' est une période de M_i, et

$$d_{\mathcal{M}}(O, M_i'') = \prod_{k \neq i} w_k \,.\, d_{\mathcal{M}}(O, M_i) \ ; \tag{24}$$

comme par définition $d_{\mathcal{M}}(O, M_i) = w_i$, il vient

$$d_{\mathcal{M}}(O, M_i'') = \prod_{k \neq i} w_k \,.\, w_i = R \,. \tag{25}$$

Considérons maintenant la boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ définie par (10). Chaque point M_i'' appartient à la boule, puisque par (25) sa distance à O est exactement R. Cela signifie que M_i'' est un point frontière de la boule dans la direction (O, M_i) :

Théorème 5 *Pour toute pondération M_i du masque $\mathcal{M}$, le point M_i'' est le dernier point de la boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ sur la droite (O, M_i).*

Comme la boule est un polyèdre discret s'appuyant sur les cônes d'influence, on en conclut que les points M_i'' sont les sommets du polyèdre. Les coordonnées des points M_i'' sont $\left(\frac{R}{w_i}x_i, \frac{R}{w_i}y_i, \frac{R}{w_i}z_i\right)$. La géométrie de la boule reste la même si on change le rayon arithmétique R. On a donc tout intérêt à ramener le rayon à 1 pour simplifier les calculs. On remarque que l'on obtient alors la boule unité dans $\mathbb{Q}^3$ de la jauge rationnelle $\frac{d_{\mathcal{M}}}{R}$.

Définition 8 (Boule rationnelle équivalente) *On appelle boule rationnelle équivalente $B'_{\mathcal{M}}$ la boule de sommets M_i' $\left(\frac{x_i}{w_i}, \frac{y_i}{w_i}, \frac{z_i}{w_i}\right)$ dans $\mathbb{Q}^3$.*

Dans un cône d'influence (M_i, M_j, M_k), on appelle *gradient discret* le vecteur $g_{i,j,k} = (dx, dy, dz)$, formé des déplacements élémentaires correspondants au cône. La normale $n_{i,j,k}$ aux faces de la boule $B'_{\mathcal{M}}$, obtenue par le produit vectoriel $\overrightarrow{M_i'M_j'} \times \overrightarrow{M_i'M_k'}$, est proportionnelle au gradient discret :

$$n_{i,j,k} = \frac{\Delta_{i,j,k}}{w_i w_j w_k} \, g_{i,j,k} \,. \tag{26}$$

6 Conditions de distance

Nous voulons établir les conditions exactes pour qu'un masque de chanfrein induise une distance. Notre stratégie repose sur le théorème 6, qui formule la condition de distance sous un aspect géométrique :

Théorème 6 *Une application est une distance ssi sa boule est convexe et symétrique* [3].

Par construction, tout masque de chanfrein est symétrique par rapport à l'origine, donc la boule de chanfrein est symétrique. Dans la section précédente, nous avons montré que la boule de chanfrein est un polyèdre discret. Nous allons donc rendre le polyèdre convexe, à partir d'un critère de convexité locale entre les faces du polyèdre, puis de l'assemblage de ces convexités locales dans une triangulation de Farey.

6.1 Volumes signés

Soient P, Q, R, S des points de $\mathbb{Z}^3$; on note $\delta^p(P,Q,R,S)$ le volume signé du parallélépipède orienté, défini par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$, et on note $\delta^t(P,Q,R,S)$ le volume signé du tétraèdre orienté correspondant. Le volume δ^p s'exprime avec le produit mixte des vecteurs, qui est le déterminant

$$\delta^p(P,Q,R,S) = \begin{vmatrix} x_Q - x_P & x_R - x_P & x_S - x_P \\ y_Q - y_P & y_R - y_P & y_S - y_P \\ z_Q - z_P & z_R - z_P & z_S - z_P \end{vmatrix} \; ; \tag{27}$$

c'est un entier relatif, qui peut également s'écrire sans soustractions

$$\delta^p(P,Q,R,S) = \begin{vmatrix} x_Q & x_R & x_S & x_P \\ y_Q & y_R & y_S & y_P \\ z_Q & z_R & z_S & z_P \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; ; \tag{28}$$

on a la relation entre les volumes

$$\delta^t(P,Q,R,S) = \frac{1}{6}\,\delta^p(P,Q,R,S) \; . \tag{29}$$

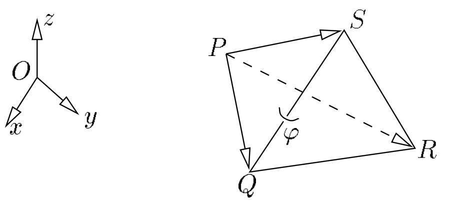

FIG. 11 – *Tétraèdre (P,Q,R,S) direct.*

Le trièdre $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})$ est direct si $\delta^p(P,Q,R,S) > 0$, indirect si $\delta^p < 0$; les points P,Q,R,S sont coplanaires ssi $\delta^p = 0$. Dans la suite, on représente un tétraèdre (P,Q,R,S) direct avec le point P « derrière » le triangle (Q,R,S), dont les sommets sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 11). On note $\varphi(P,Q,R,S)$ l'angle entre les triangles orientés (P,Q,S) et (Q,R,S). On dit que ces triangles sont *localement convexes* si $\varphi(P,Q,R,S) \geq 180°$, et on a

$$\varphi(P,Q,R,S) \geq 180° \;\Leftrightarrow\; \delta^p(P,Q,R,S) \geq 0 \; . \tag{30}$$

6.2 Critère de convexité locale

Nous allons établir le critère de convexité locale entre 2 faces de la boule de chanfrein en terme de contraintes sur les poids w_i. Le point clé du raisonnement est de se ramener à la boule rationnelle équivalente $B'_{\mathcal{M}}$ (cf §5.4).

Les pondérations d'un masque de chanfrein $\mathcal{M}$ étant $M_i(x_i, y_i, z_i, w_i)$, les sommets de $B'_{\mathcal{M}}$ sont $M'_i\left(\frac{x_i}{w_i}, \frac{y_i}{w_i}, \frac{z_i}{w_i}\right)$.
On note $\delta'_{i,j,k,l} = \delta^p(M'_i, M'_j, M'_k, M'_l)$ et $\Delta_{i,j,k} = \Delta_{M_i,M_j,M_k} = \delta^p(O, M_i, M_j, M_k)$.

Prenons 4 pondérations M_p, M_q, M_r et M_s de $\mathcal{M}$, définissant 2 triangles réguliers orientés (M_p, M_q, M_s) et (M_q, M_r, M_s). La condition de convexité locale sur $B'_{\mathcal{M}}$ est $\varphi(M'_p, M'_q, M'_r, M'_s) \geq 180°$, et s'écrit $\delta'_{p,q,r,s} \geq 0$ par (30). On a

$$\delta'_{p,q,r,s} = \begin{vmatrix} \frac{x_q}{w_q} & \frac{x_r}{w_r} & \frac{x_s}{w_s} & \frac{x_p}{w_p} \\ \frac{y_q}{w_q} & \frac{y_r}{w_r} & \frac{y_s}{w_s} & \frac{y_p}{w_p} \\ \frac{z_q}{w_q} & \frac{z_r}{w_r} & \frac{z_s}{w_s} & \frac{z_p}{w_p} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{31}$$

par (28) ; on factorise les $\frac{1}{w_i}$

$$\delta'_{p,q,r,s} = \frac{1}{w_p w_q w_r w_s} \begin{vmatrix} x_q & x_r & x_s & x_p \\ y_q & y_r & y_s & y_p \\ z_q & z_r & z_s & z_p \\ w_q & w_r & w_s & w_p \end{vmatrix} \; ; \tag{32}$$

on développe enfin par mineurs de la forme $\Delta_{i,j,k}$

$$\delta'_{p,q,r,s} = \frac{1}{w_p w_q w_r w_s} \begin{pmatrix} w_p \Delta_{q,r,s} - w_q \Delta_{r,s,p} \\ + w_r \Delta_{q,s,p} - w_s \Delta_{q,r,p} \end{pmatrix} \; . \tag{33}$$

La condition de convexité locale $\delta'_{p,q,r,s} \geq 0$ s'écrit donc par (33) :

Théorème 7 (Critère de convexité locale) *Soit 2 triangles réguliers orientés (M_p, M_q, M_s) et (M_q, M_r, M_s). Le critère de convexité locale entre les 2 faces correspondantes sur la boule, noté* $\mathrm{CCL}(M_p, M_q, M_r, M_s)$*, est*

$$w_p \Delta_{q,r,s} - w_q \Delta_{r,s,p} + w_r \Delta_{q,s,p} - w_s \Delta_{q,r,p} \geq 0 \; . \tag{34}$$

6.3 Convexité globale

Considérons un masque de chanfrein 48-symétrique $\mathcal{M}$, dont le générateur est composé de points visibles, et une triangulation de Farey de ces points.

La convexité globale est obtenue avec un système de CCL entre tous les couples de triangles adjacents dont l'un au moins est interne à $\mathcal{S}$. Si dans le couple l'un des triangles est externe, alors il est symétrique au triangle interne.

Le théorème 7 traduit ensuite les CCL en un système de contraintes sur les poids. Si les pondérations du masque respectent ce système, alors la facétisation de la boule est convexe. De plus la facétisation de la boule (i.e la partition en cônes d'influence) correspond par construction à la triangulation de Farey de départ, et donc chaque triangle de la triangulation définit son propre cône d'influence.

On en déduit par le §5.3 que la boule de chanfrein est un polyèdre discret convexe ; donc le théorème 6 est satisfait et le masque induit bien une distance.

Le choix d'une triangulation de Farey garantit que tous les cônes correspondants sont réguliers. Si l'on établit le système de CCL sur une triangulation qui n'est pas de Farey, alors les déplacements élémentaires peuvent ne pas être constants dans un cône, en particulier lorsque les déterminants ne sont pas divisibles par $\Delta_{i,j,k}$ dans (19). Dans ce cas, la face correspondante ne sera pas limitée par un plan discret, mais sera par exemple dentelée, ou présentera une légère concavité.

En conclusion, la construction du générateur d'un masque de chanfrein se fait en quatre étapes :

1. on prend un ensemble de points visibles dans $\mathcal{S}$;
2. on choisit une triangulation de Farey de ces points ;
3. on détermine le système de CCL ;
4. on calcule des poids satisfaisant les CCL.

7 Exemples

Étant donné un point visible v, on note $v^i = \sigma_i(v)$; par exemple b^2 est $\sigma_2(\mathsf{b})$.

7.1 Contraintes pour le masque $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$

La triangulation de Farey du masque $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ est unique dans $\mathcal{S}$. Pour rendre la boule convexe il suffit de faire respecter le critère de convexité locale CCL du §6.2 entre la face $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ et les 3 faces adjacentes, représentées figure 12-T1.

Lorsqu'un triangle (q, r, s) est sur la frontière de $\mathcal{S}$, il est adjacent à son symétrique (q, s, r^i) par rapport à la frontière. On remarque que si on change l'arête (q, s) par l'arête (r, r^i) on obtient une autre triangulation, appelée *co-triangulation*, qui est « à cheval » sur $\mathcal{S}$. Dans certains cas la co-triangulation est encore une triangulation de Farey ; mais les faces adjacentes ne sont alors plus les mêmes pour le CCL. Ce phénomène est illustré figure 12 avec la triangulation T2.

On extrait de la figure 12 les quadruplets sur lesquels appliquer le CCL ; l'ordre des points est important, de lui dépend le signe (voir la fin du §6.1 et figure 11). On applique ensuite le théorème 7 pour calculer les contraintes sur les poids, et on obtient la figure 13.

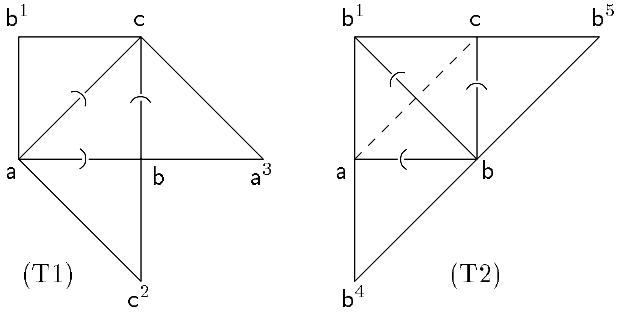

FIG. 12 – *Les 2 triangulations pour le masque* $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$.

T1	$(\mathsf{a}^3, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$	$\mathsf{b} \leq 2\mathsf{a}$
	$(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$	$\mathsf{a} + \mathsf{c} \leq 2\mathsf{b}$
	$(\mathsf{c}^2, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$	$\mathsf{b} \leq \mathsf{c}$
T2	$(\mathsf{b}^4, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{b}^1)$	$\mathsf{a} \leq \mathsf{b}$
	$(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{b}^1)$	$2\mathsf{b} \leq \mathsf{a} + \mathsf{c}$
	$(\mathsf{b}^5, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{b}^1)$	$2\mathsf{c} \leq 3\mathsf{b}$

FIG. 13 – *Contraintes de convexité sur* $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$.

7.2 Contraintes pour le masque $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{j})$

Le masque $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{j})$ est très intéressant : en effet, la triangulation de Farey du masque est unique dans $\mathcal{S}$ (figure 14-T1), mais chacun des trois triangles est frontière ; on a donc le choix entre les arêtes (a, b) ou $(\mathsf{j}, \mathsf{j}^2)$, (b, c) ou $(\mathsf{j}, \mathsf{j}^3)$, (c, a) ou $(\mathsf{j}, \mathsf{j}^1)$: il y a en tout 8 triangulations différentes (figure 14-T8).

On note cependant qu'aucun des triangles $(\mathsf{a}, \mathsf{j}^2, \mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^2, \mathsf{b}, \mathsf{j})$, $(\mathsf{b}, \mathsf{j}^3, \mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^3, \mathsf{c}, \mathsf{j})$, $(\mathsf{c}, \mathsf{j}^1, \mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^1, \mathsf{a}, \mathsf{j})$ n'est de Farey ; donc aucune co-triangulation n'est de Farey, et donc la triangulation T1 est bien l'unique triangulation de Farey du masque.

Dans la figure 15 on applique le théorème 7 sur la triangulation T1 représentée figure 14. On remarque que le CCL sur les arêtes (a, j), (b, j) et (c, j) est exprimé par le seul CCL$(\mathsf{c}, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{j})$. On note enfin que si l'on remplace les 4 poids par leur distance euclidienne, on obtient la triangulation T8, et les contraintes de T1 ne sont pas respectées.

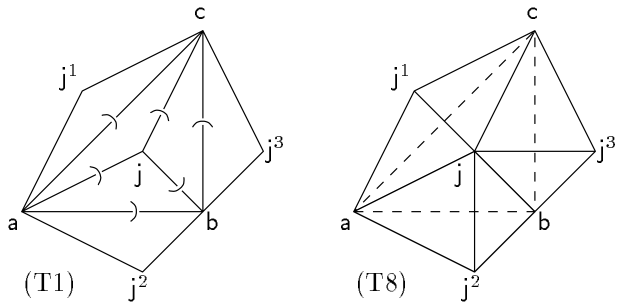

FIG. 14 – *Triangulations pour le masque* $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j})$.

T1	$(\mathsf{j}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$\mathsf{a}+2\mathsf{b}\leq\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^3,\mathsf{c},\mathsf{j},\mathsf{b})$	$3\mathsf{b}+2\mathsf{c}\leq 2\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^1,\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{c})$	$3\mathsf{a}+3\mathsf{c}\leq 2\mathsf{j}$
	$(\mathsf{c},\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$\mathsf{j}\leq\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}$

FIG. 15 – *Contraintes de convexité sur* $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j})$.

7.3 Vues 3D

On note τ l'erreur relative par rapport à d_E [10, 11]. On représente figure 16 les boules $B_{\mathcal{M}}(R)$ pour différents masques de chanfrein. La sphère (a) est la boule $B_{3,4,5}(54)$, dont les faces $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ et $(\mathsf{a},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$ sont coplanaires, avec $\tau = 7.94457\%$. La sphère (b) est la boule $B_{19,27,33}(342)$ qui est une triangulation T1 de la figure 12, avec $\tau = 6.10540\%$. La sphère (c) est la boule $B_{11,16,19,\mathsf{j}=45}(198)$; elle illustre la triangulation T1 de la figure 14, avec $\tau = 5.99710\,\%$.

Références

[1] Z. Aktouf, G. Bertrand, and L. Perroton. A 3D-hole closing algorithm. In *Lectures Notes in Computer Science*, volume 1176, pages 36–47. Springer Verlag, 1996.

[2] D. Attali, G. Sanniti di Baja, and E. Thiel. Skeleton simplification through non significant branch removal. *Image Processing and Communications*, 3(3-4):63–72, 1997.

[3] M. Berger. *Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*, volume 3. Cedic / Fernand Nathan, $2^{ème}$ édition, 1978. §11.8.12.

[4] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[5] D.J. Grabiner. Farey nets and multidimensional continued fractions. *Monatshefte für Mathematik*, 114:35–60, 1992.

[6] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, fifth edition, October 1978. §3.1.

[7] U. Montanari. A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance. *Journal of ACM*, 15:600–624, 1968.

[8] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of ACM*, 13(4):471–494, 1966.

[9] G. Sanniti di Baja and E. Thiel. (3,4)-weighted skeleton decomposition for pattern representation and description. *Pattern Recognition*, 27:1039–1049, 1994.

[10] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications.* PhD thesis, UJF, Grenoble, Sept 1994. `http://www.lim.univ-mrs.fr/~thiel/these`.

[11] J.H. Verwer. Local distance for distance transformations in two and three dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 12:671–682, 1991.

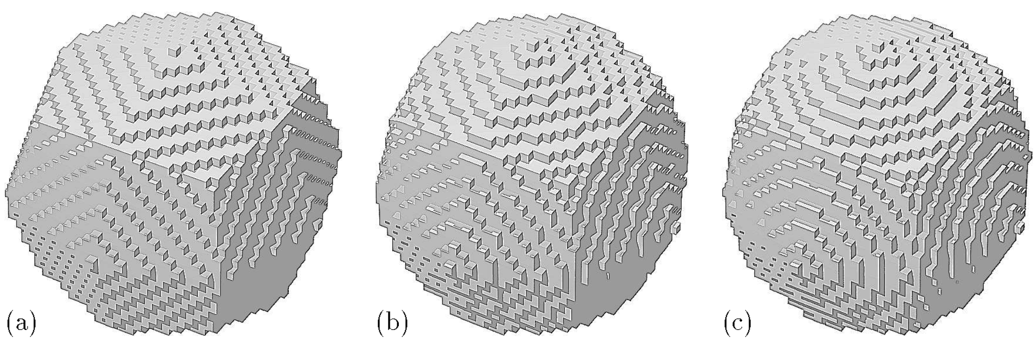

FIG. 16 – *Sphères de chanfrein (a)* $B_{3,4,5}$ *, (b)* $B_{19,27,33}$ *, (c)* $B_{11,16,19,\mathsf{j}=45}$.