12^{e} journées de l'AFIG, Association Française d'Informatique Graphique, pages 126-135, Reims, Nov 1999.

Triangulations des boules de chanfrein

Eric Remy **et Edouard** Thiel

LIM, Case 901, 163 av Luminy, 13288 Marseille cedex 9
{Eric.Remy, Edouard.Thiel}@lim.univ-mrs.fr

Résumé : *Nous étudions les masques de chanfrein en 3 dimensions, dont les fondements théoriques s'appuient sur les triangulations de points visibles dans les ensembles de Farey. On définit les déplacements élémentaires et les cônes d'influence, et on se ramène à une boule rationnelle équivalente. On montre dans quelles conditions un masque de chanfrein induit une distance par une contrainte de convexité sur la boule ; la boule de chanfrein est alors un polyèdre discret, dont la triangulation est connue.*

Mots-clés : Distances de chanfrein, ensembles et triangulations de Farey, géométrie discrète.

1 Introduction

En analyse d'images et en géométrie discrète, on a besoin de la notion de distance discrète, qui est utile pour décrire les objets présents dans l'image. Les distances de chanfrein, encore appelées distances pondérées, sont des distances discrètes largement utilisées, par exemple pour le calcul de squelettes réversibles, pour séparer des objets accolés, pour interpoler deux objets, pour calculer le graphe de Voronoï généralisé, ou encore pour remplir des trous dans des surfaces.

Une distance discrète est définie positive, symétrique et respecte l'inégalité triangulaire, le tout avec des nombres entiers. Le but est d'approximer la distance euclidienne d_E avec des entiers, de façon très efficace en terme de calcul et de stockage sur toute une image à la fois.

On peut définir les distances de chanfrein de la façon suivante : le *masque de chanfrein* est un ensemble de déplacements autorisés dans un voisinage, chaque déplacement étant pondéré avec un coût entier ; la *distance de chanfrein* entre deux points est le coût du chemin de coût minimal les rejoignant, formé des déplacements autorisés par le masque. La notion de réseau est sous-jacente.

Borgefors popularise les distances de chanfrein dans [Bor84], en dimension quelconque. Par la suite, de multiples méthodes d'optimisation sont proposées, la contribution majeure étant de Verwer en 2D et 3D [Ver91]. On trouve un historique complet, la comparaison des méthodes d'optimisation et les formules de passage entre méthodes dans [Thi94].

Les distances de chanfrein présentent de nombreux attraits, qui justifient leur succès dans les applications. Ce sont des distances locales, c'est-à-dire qui permettent de déduire une distance à partir des distances de voisins proches, contrairement à d_E. Le calcul de l'axe médian se fait également par un test local [Thi94]. Tous les calculs se passent en nombres entiers et avec des opérations linéaires ($+$, $-$, $<$).

L'attrait principal est la grande rapidité — et la simplicité — de l'algorithme de transformation de distance, dû à Rosenfeld [Ros66]. La transformation de distance, notée DT, consiste à étiqueter chaque point objet d'une image à sa distance au complémentaire. La transformation est globale, et l'algorithme de Rosenfeld la fait en 2 passes sur l'image, indépendamment de l'épaisseur des objets dans l'image, et quelle que soit la dimension. L'algorithme inverse permet de retrouver un objet à partir de son axe médian, également en 2 passes.

Un masque de chanfrein n'induit pas forcément une distance ; il faut respecter certaines conditions sur le choix des déplacements et sur le choix des poids associés. Avoir une distance est nécessaire d'un point de vue mathématique, et pour assurer la validité des algorithmes.

En 2 dimensions, nous avons établi dans [Thi94] les conditions exactes pour qu'une distance soit induite. Pour cela nous avons établi les propriétés arithmétiques et géométriques des boules de chanfrein, et dégagé les structures générales de cônes et de déplacements élémentaires. Ces résultats reposent sur les suites de Farey, relatives à la géométrie des nombres [Har78].

Nous proposons dans cet article une étude des boules de chanfrein en 3 dimensions, dont les structures sont encore plus riches. En effet, le passage de la $2^{ème}$ à la $3^{ème}$ dimension fait perdre l'ordre angulaire entre les points visibles, et la triangulation n'est plus unique. Nous présentons les propriétés qui permettent, par le biais des ensembles et des triangulations de Farey, de construire une distance dont la boule correspond à la triangulation voulue.

Au §2 nous définissons l'espace de travail, le masque, la distance et la boule de chanfrein ; les points visibles sont introduits au §3 et les propriétés des ensembles de Farey au §4. Dans le §5 on étudie la géométrie de la boule, les déplacements élémentaires dans les cônes d'influence, et on se ramène à une boule rationnelle équivalente. Les contraintes exactes pour qu'un masque de chanfrein induise une distance sont établies au §6 avec un critère de convexité sur la boule. Enfin au §7, on illustre par des masques qui vérifient les contraintes, les triangulations obtenues.

2 Définitions

Notre espace de travail est le maillage cubique, que l'on associe au réseau fondamental Λ de $\mathbb{Z}^3$. Le maillage cubique implique la symétrie par rapport aux plans des axes et des bissectrices, appelée *48-symétrie* : elle découpe $\mathbb{Z}^3$ en 48 sous-espaces ($48 = 2^3.3!$ avec 2^3 combinaisons de signes et 3! permutations de coordonnées), contre 8 octants dans $\mathbb{Z}^2$. On note $\mathcal{S}$ le $48^{ème}$ d'espace

$$\mathcal{S} = \left\{ 0 \leq z \leq y \leq x \,,\ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \right\} \tag{1}$$

et on note $\mathcal{S}_n = \{(x,y,z) \in \mathcal{S} \,,\ x \leq n\}$. Dans la suite on représentera principalement $\mathcal{S}$ avec la projection π (figure 1) :

$$\pi : (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \ . \tag{2}$$

Par définition de $\mathcal{S}$, les bords du triangle vu en projection dans la figure 1.b sont les 3 plans passant par O tels que $z = y$, $z = 0$ et $y = x$. L'intérieur du triangle est tel que $0 < z < y < x$ (figure 1.c). On se donne les symétries σ par rapport aux plans bordant $\mathcal{S}$, illustrées figure 1.d :

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,z,y) \\ \sigma_2 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \\ \sigma_3 : (x,y,z) & \longmapsto & (y,x,z) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \\ \sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \end{array} \tag{3}$$

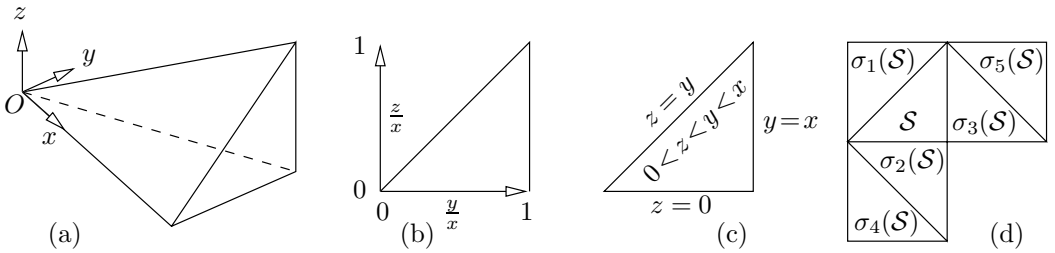


FIG. 1 – *Le $48^{ème}$ d'espace $\mathcal{S}$ (a), la représentation en projection π (b), plans bordant $\mathcal{S}$ (c) et symétries associées en projection (d).*

Définition 1 (Pondération) *On appelle pondération $M(x,y,z,w)$ un point $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ muni d'un poids $w \in \mathbb{N}$.*

Un *masque de chanfrein* $\mathcal{M}$ consiste en un voisinage centré en O, de taille $(2N+1)^3$, dans lequel on autorise certains déplacements, que l'on pondère. Autrement dit, $\mathcal{M}$ est un ensemble 48-symétrique de m pondérations

$$\mathcal{M} = \{\, M_i(x_i, y_i, z_i, w_i) \,,\ 1 \leq i \leq m \,\} \tag{4}$$

sur lequel on va rajouter par la suite certaines contraintes. On appelle *générateur* $\mathcal{M}^g$ d'un masque $\mathcal{M}$ la partie $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, de laquelle sont déduites toutes les autres pondérations par la 48-symétrie. Étant donné un masque $\mathcal{M}$, un *chemin* $\mathcal{P}$ est une suite de déplacements

$$\mathcal{P} = n_1 M_1 + \ldots + n_m M_m \,, \quad n_i \geq 0 \ . \tag{5}$$

Le *coût* $W(\mathcal{P})$ associé à ce chemin est : $$W(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} n_i w_i \,. \tag{6}$$

Définition 2 (Distance de chanfrein) *La distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$ entre 2 points A et B est le minimum des coûts associés à tous les chemins $\mathcal{P}$ reliant A à B :*

$$d_{\mathcal{M}}(A,B) = \min_{\mathcal{P}} W(\mathcal{P})\,, \quad \overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{AB}\,. \tag{7}$$

Mais cette fonction $d_{\mathcal{M}}$ n'est pas forcément une distance au sens mathématique ; nous nous proposons donc d'établir les conditions strictes de distance à partir de la géométrie de la boule, qui dans certains cas est un polyèdre discret. La *boule de chanfrein* $B_{\mathcal{M}}$ de rayon $R \in \mathbb{N}$ est

$$B_{\mathcal{M}}(R) = \left\{\, p \in \mathbb{Z}^3 : d_{\mathcal{M}}(O,p) \le R \,\right\} \tag{8}$$

où R est un rayon arithmétique, différent du rayon en nombre de voxels.

3 Points visibles

Définition 3 (Point visible) *Un point $P(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ est dit visible (i.e visible depuis l'origine) s'il n'y a aucun point du réseau fondamental qui soit situé sur (OP) entre O et P. Une condition nécessaire et suffisante est* $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$ [Har78].

Dans un masque de chanfrein, une pondération (x,y,z,w) engendre par translation les *périodes* $(2x,2y,2z,2w)$, $(3x,3y,3z,3w)$, etc. Pour des raisons évidentes d'efficacité dans les transformations de distances, un masque de chanfrein n'est donc constitué que de points visibles.

On note $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des points visibles de $\mathcal{S}_n$

$$\mathcal{V}_n = \left\{\, (x,y,z) \in \mathcal{S}_n : \mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1 \,\right\} \tag{9}$$

et on appelle *couche* n le sous-ensemble $\mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$. On peut obtenir $\mathcal{V}_n$ avec un crible sur les périodes des points visibles, en faisant un balayage de $\mathcal{S}_n$ en x,y,z. Les points visibles sont numérotés v_0, v_1, v_2, ... dans l'ordre lexicographique de leur coordonnées x,y,z ; les points de $\mathcal{V}_4$ sont nommés a, b, c, ..., v dans le même ordre. On donne figure 2 les coordonnées cartésiennes des points de $\mathcal{V}_4$, et dans la figure 3 on représente les points de $\mathcal{V}_4$ avec la projection π.

v_0	a	$(1,0,0)$
v_1	b	$(1,1,0)$
v_2	c	$(1,1,1)$
v_3	d	$(2,1,0)$
v_4	e	$(2,1,1)$
v_5	f	$(2,2,1)$

v_6	g	$(3,1,0)$
v_7	h	$(3,1,1)$
v_8	i	$(3,2,0)$
v_9	j	$(3,2,1)$
v_{10}	k	$(3,2,2)$
v_{11}	l	$(3,3,1)$

v_{12}	m	$(3,3,2)$
v_{13}	n	$(4,1,0)$
v_{14}	o	$(4,1,1)$
v_{15}	p	$(4,2,1)$
v_{16}	q	$(4,3,0)$

v_{17}	r	$(4,3,1)$
v_{18}	s	$(4,3,2)$
v_{19}	t	$(4,3,3)$
v_{20}	u	$(4,4,1)$
v_{21}	v	$(4,4,3)$

FIG. 2 – *Points visibles $\mathcal{V}_4$ (numéro, nom, coordonnées).*

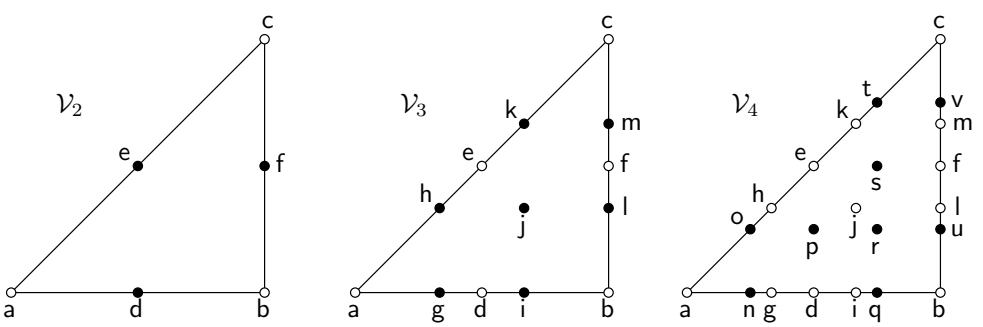


FIG. 3 – *Points visibles en projection (point • de $\mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$, point ∘ de $\mathcal{V}_{n-1}$).*

4 Farey

Les *suites de Farey* F_n sont les séries croissantes de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont le dénominateur n'excède pas n [Har78]. Elles sont l'élément théorique fondamental sur lequel reposent les propriétés et conditions de distance des masques de chanfrein en 2D [Thi94]. Leur extension à $\mathbb{Q}^2$ sont les ensembles de Farey [Gra92].

Définition 4 (Ensemble de Farey) *Les ensembles de Farey $\widehat{F}_n$ d'ordre n sont les ensembles de points irréductibles $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ entre $[0,0]$ et $[1,1]$ dont le dénominateur x n'excède pas n.*

Donc $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \widehat{F}_n$ si $x \leq n$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq x$, et si la forme est irréductible, i.e si $\mathrm{pgcd}(x,y,z) = 1$. Donc $(x,y,z) \in \mathcal{V}_n$ ou $(x,z,y) \in \mathcal{V}_n$ par (9), et par (3) il vient la correspondance avec les points visibles entre $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{Z}^3$

$$\widehat{F}_n = \left\{ \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) : (x,y,z) \in \mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n) \right\} . \tag{10}$$

La bijection faisant correspondre (x,y,z) à $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ entre $\mathcal{V}_n \cup \sigma_1(\mathcal{V}_n)$ et $\widehat{F}_n$ est la projection π, définie en (2). Pour tout point A de $\mathbb{Z}^3$ on note $\widehat{A} = \pi(A)$ le point correspondant de $\mathbb{Q}^2$. On définit l'opération $\widehat{+}$ dans $\mathbb{Q}^2$ par

$$\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \widehat{+} \left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}\right) = \left(\frac{y+y'}{x+x'}, \frac{z+z'}{x+x'}\right) . \tag{11}$$

Étant donné deux points $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de $\mathbb{Q}^2$, on appelle *point médian* de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ le point $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$. On voit que $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$ correspond à $A+B$ de $\mathbb{Z}^3$, autrement dit $\pi(A)\widehat{+}\pi(B) = \pi(A+B)$.

Considérons un triplet (Q,R,S) de points de $\mathbb{Z}^3$. On note $\Delta_{Q,R,S}$ l'entier relatif qui est le volume signé du parallélépipède (O,Q,R,S)

$$\Delta_{Q,R,S} = \begin{vmatrix} x_Q & x_R & x_S \\ y_Q & y_R & y_S \\ z_Q & z_R & z_S \end{vmatrix} . \tag{12}$$

Définition 5 (Triangle régulier) *On dit qu'un triplet (Q,R,S) de points de $\mathbb{Z}^3$ forme un triangle régulier si $\Delta_{Q,R,S} = \pm 1$.*

Un triangle régulier correspond à la notion de points *consécutifs* dans une suite de Farey, et possède les propriétés suivantes.

Théorème 1 (Minkowsky) *Le parallélépipède (O,Q,R,S) ne contient aucun point du réseau fondamental de $\mathbb{Z}^3$ autre que ses sommets ssi $\Delta_{Q,R,S} = \pm 1$* [Har78]. *On dit qu'un objet* contient *un point si le point est inclus dans l'intérieur, le bord ou les sommets de l'objet.*

Donc lorsque 3 points visibles (Q,R,S) forment un triangle régulier, alors le parallélépipède (O,Q,R,S) ne contient aucun autre point visible (figure 4).

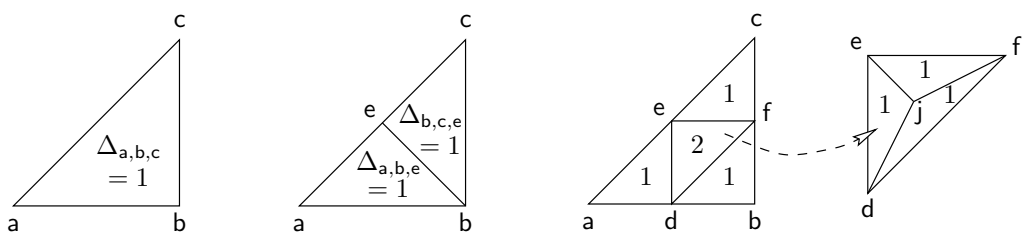


FIG. 4 – *Triangles réguliers (en projection) avec des points visibles. Le triplet* $(\mathsf{d},\mathsf{e},\mathsf{f})$ *n'est pas un triangle régulier puisque* $\Delta_{\mathsf{d},\mathsf{e},\mathsf{f}} = 2$ *; de fait le parallélépipède* $(O,\mathsf{d},\mathsf{e},\mathsf{f})$ *contient* j.

Lorsque 3 points sont consécutifs dans une suite de Farey, le second point est le médian des deux autres [Har78]. Dans les ensembles de Farey cela s'écrit :

Théorème 2 (Mönkemeyer) *Soit $(\widehat{Q},\widehat{R},\widehat{S})$ un triangle régulier de $\widehat{F}_n$. Soit $\widehat{P}$ un point de $\widehat{F}_{n+1}$, inclus dans le triangle et distinct des sommets ; alors $\widehat{P}$ est le médian de 2 des sommets et se situe obligatoirement sur un bord du triangle régulier de $\widehat{F}_n$.* [Gra92].

On appelle *triangulation de Farey* F_n^Δ l'ensemble de Farey $\widehat{F}_n$, muni d'une triangulation sur les points de $\widehat{F}_n$, telle que tous les triangles sont des triangles réguliers. La triangulation dans les suites de Farey est toujours unique ; dans un ensemble de Farey, elle n'est presque jamais unique. On dit qu'une séquence de triangulation de Farey est *compatible* si la triangulation de F_n^Δ est un raffinement de la triangulation de F_{n-1}^Δ.

Par le théorème 2 on a donc un procédé de construction de tout $\widehat{F}_{n+1}$ à partir d'un F_n^Δ. La figure 5 montre des exemples de triangulations compatibles.

FIG. 5 – *Séquences compatibles de triangulations de Farey dans $\widehat{F}_2$.*

5 Géométrie de la boule

5.1 Cône d'influence

On appelle *cône* (Q,R,S) le sous-espace de $\mathcal{S}$ délimité par les plans (O,Q,R), (O,R,S) et (O,S,Q). Un cône (Q,R,S) est dit *régulier* si le triangle (Q,R,S) est régulier.

Théorème 3 *Si un cône (Q,R,S) est régulier, alors tous les points du cône sont atteints par un chemin depuis O, constitué uniquement des déplacements Q, R et S.*

Tout point P d'un cône régulier (M_i,M_j,M_k) est donc atteint depuis O par un chemin $n_iM_i + n_jM_j + n_kM_k$. Le coût de ce chemin est $W = n_iw_i + n_jw_j + n_kw_k$ par (6). La distance $d_{\mathcal{M}}(O,P)$ est égale à W si ce coût est le minimum des coûts de tous les chemins atteignant P. Dans ce cas, seules sont intervenues les pondérations M_i, M_j et M_k dans le calcul de la distance.

Définition 6 (Cône d'influence) *On appelle cône d'influence (M_i,M_j,M_k) un cône régulier dans lequel les seules pondérations M_i, M_j et M_k du masque interviennent dans le calcul de la distance à O en tout point du cône.*

La notion de cône d'influence est l'expression de l'inégalité triangulaire dans un réseau pondéré : un chemin du cône d'influence est le « plus direct » possible dans le réseau associé au masque.

5.2 Déplacements élémentaires

Définition 7 (Déplacement élémentaire) *On appelle déplacement élémentaire dx, dy ou dz, le coût d'un déplacement unitaire en x, y ou z respectivement.*

Théorème 4 *Dans un cône d'influence (M_i,M_j,M_k), les déplacements élémentaires sont constants dans tout le cône, et valent*

$$dx = \frac{1}{\Delta_{i,j,k}}\begin{vmatrix} y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix},\ dy = \frac{-1}{\Delta_{i,j,k}}\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ z_i & z_j & z_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix},\ dz = \frac{1}{\Delta_{i,j,k}}\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

On remarque que si $\Delta_{i,j,k} \neq \pm 1$, alors les déplacements élémentaires peuvent ne pas être entiers. Au niveau de l'image de distance, les déplacements ne sont plus constants mais périodiques, et on retrouve ces valeurs en moyenne sur la période.

Dans la figure 6, on illustre les formules de calcul des déplacements élémentaires du théorème 4, sur des triangles réguliers de points visibles.

Triangle	dx	dy	dz
(a, b, c)	a	b − a	c − b
(a, b, e)	a	b − a	e − a − b
(b, c, e)	e − c	b + c − e	c − b

(a, d, e)	a	d − 2a	e − d
(d, b, e)	d − b	2b − d	e − d
(b, f, e)	b + e − f	f − e	f − 2b
(f, c, e)	e − c	f − e	2c − f

FIG. 6 – *Déplacements élémentaires dans des triangles réguliers.*

5.3 Polyèdre discret

Un corollaire important du théorème 4 est que l'intersection d'un cône d'influence avec sa boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ est

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz \leq R \tag{14}$$

qui est l'équation d'un demi-espace discret, dont la normale est (dx, dy, dz). S'il existe un partitionnement du générateur du masque en cônes d'influence, alors la boule de chanfrein est un polyèdre discret. Un tel partitionnement correspond par définition à une triangulation de Farey des pondérations du masque. Dans la partie §6, on détermine à partir d'une triangulation de Farey donnée, les contraintes exactes à appliquer sur les poids du masque, pour que la triangulation corresponde aux cônes d'influence effectifs.

5.4 Boule rationnelle équivalente

Étant donné un masque $\mathcal{M} = \{ M_i(x_i, y_i, z_i, w_i) \}$, on fixe l'entier $R = \prod_k w_k$, et on définit les points $M_i'' = \frac{R}{w_i} M_i$. Pour tout i on a

$$\frac{R}{w_i} = \frac{\prod_k w_k}{w_i} = \prod_{k \neq i} w_k \tag{15}$$

qui est un entier, donc M_i'' est un multiple de M_i ; or par définition $d_{\mathcal{M}}(O, M_i) = w_i$, d'où

$$d_{\mathcal{M}}(O, M_i'') = \prod_{k \neq i} w_k \,.\, d_{\mathcal{M}}(O, M_i) = \prod_{k \neq i} w_k \,.\, w_i = R \,. \tag{16}$$

Considérons maintenant la boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ définie par (8). Chaque point M_i'' appartient à la boule, puisque par (16) sa distance à O est exactement R. On en déduit le théorème :

Théorème 5 *Pour toute pondération M_i du masque $\mathcal{M}$, le point M_i'' est le dernier point de la boule $B_{\mathcal{M}}(R)$ sur la droite (O, M_i).*

La boule est un polyèdre discret s'appuyant sur les cônes d'influence, donc les points M_i'' sont les sommets du polyèdre. Les coordonnées des points M_i'' sont $(\frac{R}{w_i}x_i, \frac{R}{w_i}y_i, \frac{R}{w_i}z_i)$. La géométrie de la boule reste la même si on change le rayon arithmétique R. On a donc tout intérêt à ramener le rayon à 1 pour simplifier les calculs.

Définition 8 (Boule rationnelle équivalente) *On appelle boule rationnelle équivalente $B'_{\mathcal{M}}$ la boule de sommets $M_i' \left(\frac{x_i}{w_i}, \frac{y_i}{w_i}, \frac{z_i}{w_i} \right)$ dans $\mathbb{Q}^3$.*

6 Conditions de distance

Nous voulons établir les conditions exactes pour qu'un masque de chanfrein induise une distance. Nous utilisons le théorème 6, qui formule ces conditions sous un aspect géométrique :

Théorème 6 *Une application est une distance ssi sa boule est convexe et symétrique* [Ber78].

Par construction, tout masque de chanfrein est symétrique par rapport à l'origine, donc la boule de chanfrein est symétrique. Dans la section précédente, nous avons montré que la boule de chanfrein est un polyèdre discret. Nous allons donc rendre le polyèdre convexe, à partir d'un critère de convexité locale entre les faces du polyèdre, puis de l'assemblage de ces convexités locales dans une triangulation de Farey.

6.1 Volumes signés

Soient P, Q, R, S des points de $\mathbb{Z}^3$; on note $\delta^p(P,Q,R,S)$ le volume signé du parallélépipède orienté, défini par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$. Le volume δ^p s'exprime avec le produit mixte des vecteurs, qui est le déterminant

$$\delta^p(P,Q,R,S) = \begin{vmatrix} x_Q & x_R & x_S & x_P \\ y_Q & y_R & y_S & y_P \\ z_Q & z_R & z_S & z_P \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} . \tag{17}$$

Le trièdre $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})$ est direct si $\delta^p(P,Q,R,S) > 0$, indirect si $\delta^p < 0$; les points P, Q, R, S sont coplanaires ssi $\delta^p = 0$.

6.2 Critère de convexité locale

Nous allons établir le critère de convexité locale entre 2 faces de la boule de chanfrein en terme de contraintes sur les poids w_i. Le point clé du raisonnement est de se ramener à la boule rationnelle équivalente $B'_{\mathcal{M}}$ (cf §5.4).

Les pondérations d'un masque de chanfrein $\mathcal{M}$ étant $M_i(x_i, y_i, z_i, w_i)$, les sommets de $B'_{\mathcal{M}}$ sont $M'_i\left(\frac{x_i}{w_i}, \frac{y_i}{w_i}, \frac{z_i}{w_i}\right)$. On note $\delta'_{i,j,k,l} = \delta^p(M'_i, M'_j, M'_k, M'_l)$ et $\Delta_{i,j,k} = \Delta_{M_i,M_j,M_k} = \delta^p(O, M_i, M_j, M_k)$.

Prenons 4 pondérations M_p, M_q, M_r et M_s de $\mathcal{M}$, définissant 2 triangles réguliers orientés (M_p, M_q, M_s) et (M_q, M_r, M_s). On dit que ces deux triangles sont *localement convexes* sur $B'_{\mathcal{M}}$ si $\delta'_{p,q,r,s} \geq 0$. Or, en factorisant les $\frac{1}{w_i}$, on a

$$\delta'_{p,q,r,s} = \frac{1}{w_p w_q w_r w_s} \begin{vmatrix} x_q & x_r & x_s & x_p \\ y_q & y_r & y_s & y_p \\ z_q & z_r & z_s & z_p \\ w_q & w_r & w_s & w_p \end{vmatrix} ; \tag{18}$$

on développe par mineurs de la forme $\Delta_{i,j,k}$

$$\delta'_{p,q,r,s} = \frac{1}{w_p w_q w_r w_s} \left(w_p \Delta_{q,r,s} - w_q \Delta_{r,s,p} + w_r \Delta_{q,s,p} - w_s \Delta_{q,r,p} \right) . \tag{19}$$

La condition de convexité locale $\delta'_{p,q,r,s} \geq 0$ s'écrit donc par (19) :

Théorème 7 (Critère de convexité locale) *Soit 2 triangles (M_p, M_q, M_s) et (M_q, M_r, M_s) réguliers et orientés . Le critère de convexité locale entre les 2 faces correspondantes sur la boule, noté* $\mathrm{CCL}(M_p, M_q, M_r, M_s)$*, est*

$$w_p \Delta_{q,r,s} - w_q \Delta_{r,s,p} + w_r \Delta_{q,s,p} - w_s \Delta_{q,r,p} \geq 0 . \tag{20}$$

6.3 Convexité globale

Considérons un masque de chanfrein 48-symétrique $\mathcal{M}$, dont le générateur est composé de points visibles, et une triangulation de Farey de ces points.

La convexité globale est obtenue avec un système de CCL entre tous les couples de triangles adjacents dont l'un au moins est interne à $\mathcal{S}$. Si dans le couple l'un des triangles est externe, alors il est symétrique au triangle interne. Le théorème 7 traduit ensuite les CCL en un système de contraintes sur les poids. Si les pondérations du masque respectent ce système, alors la facétisation de la boule est convexe. De plus la facétisation de la boule (i.e la partition en cônes d'influence) correspond par construction à la triangulation de Farey de départ, et donc chaque triangle de la triangulation définit son propre cône d'influence. On en déduit par le §5.3 que la boule de chanfrein est un polyèdre discret convexe ; donc le théorème 6 est satisfait et le masque induit bien une distance.

Le choix d'une triangulation de Farey garantit que tous les cônes correspondants sont réguliers. Si l'on établit le système de CCL sur une triangulation qui n'est pas de Farey, alors les déplacements élémentaires peuvent ne pas être constants dans un cône, en particulier lorsque les déterminants ne sont pas divisibles par $\Delta_{i,j,k}$ dans (13). Dans ce cas, la face correspondante ne sera pas limitée par un plan discret, mais sera par exemple dentelée, ou légèrement concave.

En conclusion, la construction du générateur d'un masque de chanfrein se fait en quatre étapes :

1. on prend un ensemble de points visibles dans $\mathcal{S}$;
2. on choisit une triangulation de Farey de ces points ;
3. on détermine le système de CCL ;
4. on calcule des poids satisfaisant les CCL.

7 Exemples de triangulations

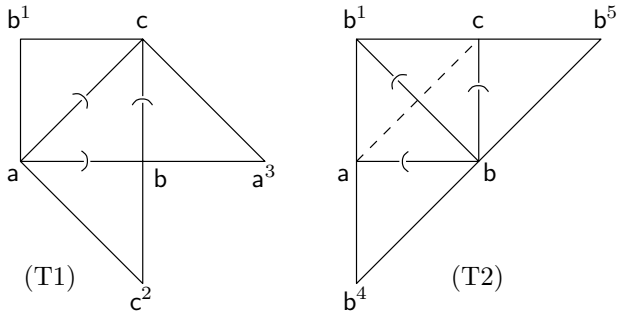
Étant donné un point visible v, on note $v^i = \sigma_i(v)$; par exemple b^2 est $\sigma_2(\mathsf{b})$.

7.1 Contraintes pour le masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$

La triangulation de Farey du masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ est unique dans $\mathcal{S}$. Pour rendre la boule convexe il suffit de faire respecter le critère de convexité locale CCL du §6.2 entre la face $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ et les 3 faces adjacentes, représentées figure 7-T1.

Lorsqu'un triangle (q,r,s) est sur la frontière de $\mathcal{S}$, il est adjacent à son symétrique (q,s,r^i) par rapport à la frontière. On remarque que si on change l'arête (q,s) par l'arête (r,r^i) on obtient une autre triangulation, appelée *co-triangulation*, qui est « à cheval » sur $\mathcal{S}$. Dans certains cas la co-triangulation est encore une triangulation de Farey ; mais les faces adjacentes ne sont alors plus les mêmes pour le CCL. Ce phénomène est illustré figure 7 avec la triangulation T2.

On extrait de la figure 7 les quadruplets sur lesquels appliquer le CCL ; l'ordre des points est important, de lui dépend le signe (cf §6.1). On applique ensuite le théorème 7 pour calculer les contraintes sur les poids, et on obtient le tableau de la figure 7.



T1	$(\mathsf{a}^3,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$\mathsf{b} \le 2\mathsf{a}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$\mathsf{a}+\mathsf{c} \le 2\mathsf{b}$
	$(\mathsf{c}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$\mathsf{b} \le \mathsf{c}$
T2	$(\mathsf{b}^4,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}^1)$	$\mathsf{a} \le \mathsf{b}$
	$(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$	$2\mathsf{b} \le \mathsf{a}+\mathsf{c}$
	$(\mathsf{b}^5,\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$	$2\mathsf{c} \le 3\mathsf{b}$

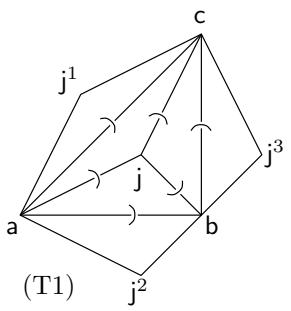
FIG. 7 – *Les 2 triangulations pour le masque* $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ *et contraintes de convexité.*

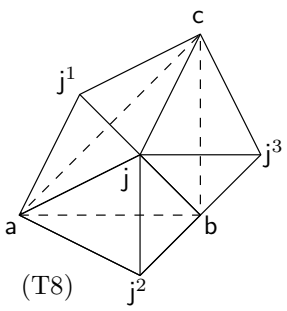
7.2 Contraintes pour le masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j})$

Le masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j})$ est très intéressant : en effet, la triangulation de Farey du masque est unique dans $\mathcal{S}$ (figure 8-T1), mais chacun des trois triangles est frontière ; on a donc le choix entre les arêtes (a,b) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^2)$, (b,c) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^3)$, (c,a) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^1)$: il y a en tout 8 triangulations différentes (figure 8-T8).

On note cependant qu'aucun des triangles $(\mathsf{a},\mathsf{j}^2,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^2,\mathsf{b},\mathsf{j})$, $(\mathsf{b},\mathsf{j}^3,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^3,\mathsf{c},\mathsf{j})$, $(\mathsf{c},\mathsf{j}^1,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^1,\mathsf{a},\mathsf{j})$ n'est de Farey ; donc aucune co-triangulation n'est de Farey, et donc la triangulation T1 est bien l'unique triangulation de Farey du masque.

Dans la figure 8 on applique le théorème 7 sur la triangulation T1. On remarque que le CCL sur les arêtes (a,j), (b,j) et (c,j) est exprimé par le seul CCL$(\mathsf{c},\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$. On note enfin que si l'on remplace les 4 poids par leur distance euclidienne, on obtient la triangulation T8, et les contraintes de T1 ne sont pas respectées.





T1	$(\mathsf{j}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$\mathsf{a}+2\mathsf{b}\leq\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^3,\mathsf{c},\mathsf{j},\mathsf{b})$	$3\mathsf{b}+2\mathsf{c}\leq 2\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^1,\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{c})$	$3\mathsf{a}+3\mathsf{c}\leq 2\mathsf{j}$
	$(\mathsf{c},\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$\mathsf{j}\leq\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c}$

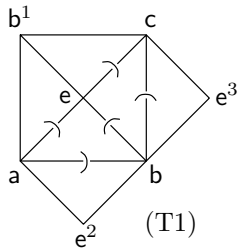
FIG. 8 – *Triangulations pour le masque* $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j})$ *et contraintes de convexité.*

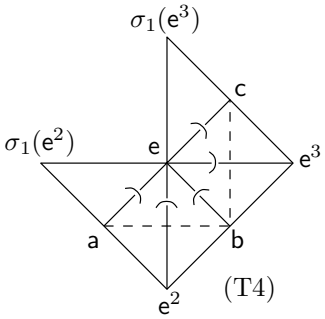
7.3 Contraintes pour le masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$

Lorsqu'on cherche à approximer d_E, on se rend compte qu'il est plus intéressant de construire un raffinement du masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ en rajoutant e plutôt que j.

La triangulation du masque $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$ est unique dans $\mathcal{S}$ (figure 9-T1). En considérant les symétries par rapport aux frontières, on obtient en tout 4 triangulations différentes (dont par exemple la figure 9-T4) ; mais seule la triangulation T1 est de Farey.

On applique le théorème 7 sur la triangulation T1 et on obtient le tableau de la figure 9. On remarque que le CCL sur les arêtes (a,e), et (e,c) donne la même inégalité.





T1	$(\mathsf{e}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{e})$	$\mathsf{a}+\mathsf{b}\leq\mathsf{e}$
	$(\mathsf{e}^3,\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$	$\mathsf{b}+2\mathsf{c}\leq 2\mathsf{e}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{e})$	$\mathsf{e}\leq 2\mathsf{b}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{e},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$\mathsf{e}\leq 2\mathsf{b}$
	$(\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$\mathsf{e}\leq\mathsf{a}+\mathsf{c}$

FIG. 9 – *Triangulations pour le masque* $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$ *et contraintes de convexité.*

7.4 Vues 3D

On note τ l'erreur relative par rapport à d_E [Thi94]. On représente figure 10 les boules $B_{\mathcal{M}}(R)$ pour différents masques de chanfrein. La sphère (a) est la boule $B_{3,4,5}(84)$, dont les faces $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ et $(\mathsf{a},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$ sont coplanaires, avec $\tau = 7.94457\%$. La sphère (b) est la boule $B_{19,27,33}(532)$ qui est une triangulation T1 de la figure 7, avec $\tau = 6.10540\%$. La sphère (c) est la boule $B_{11,16,19,\mathsf{j}=45}(286)$; elle illustre la triangulation T1 de la figure 8, avec $\tau = 5.99710\,\%$. Enfin, la sphère (d) est la boule $B_{7,10,13,\mathsf{e}=18}(189)$ qui illustre la triangulation T1 de la figure 9, avec $\tau = 4.63960\,\%$.

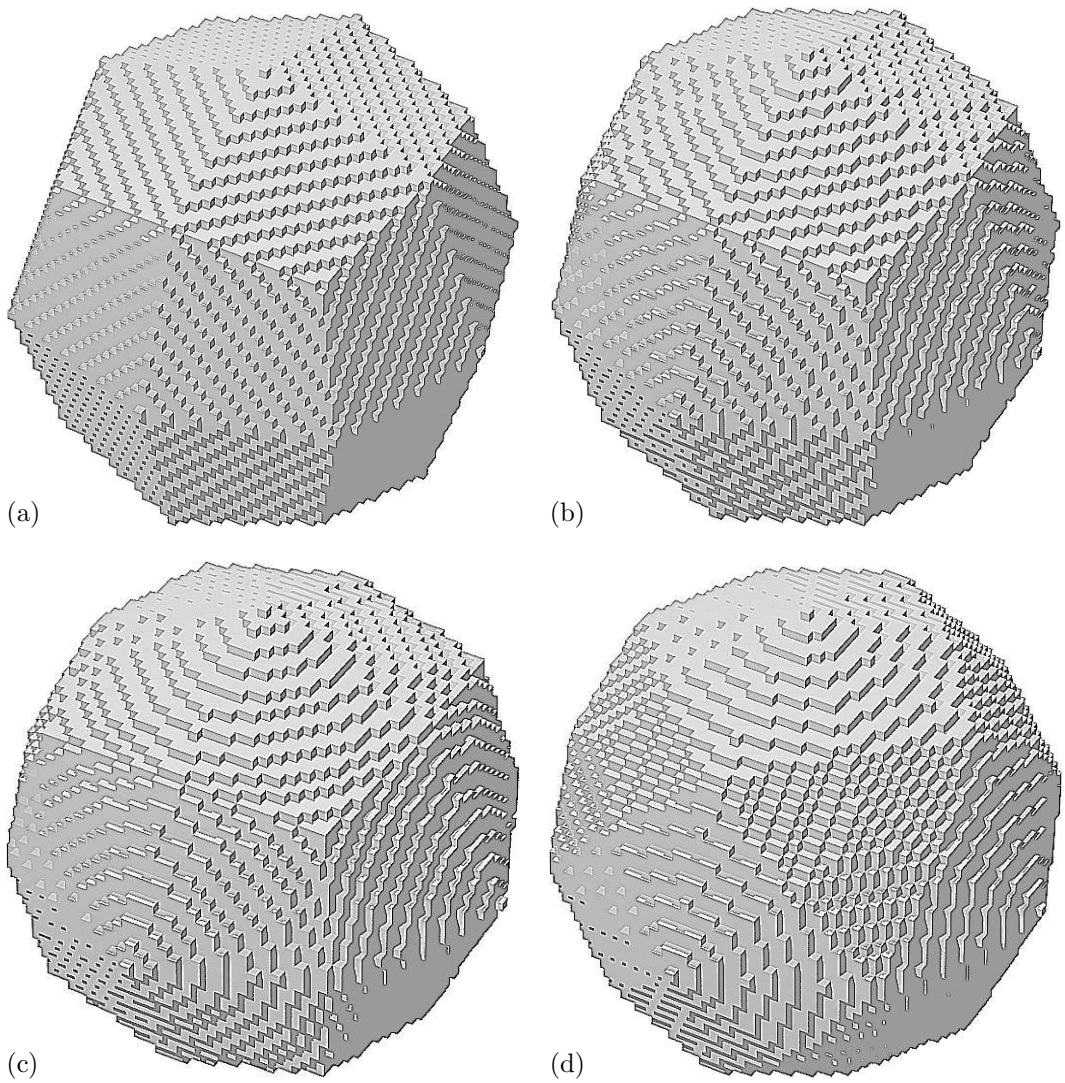


FIG. 10 – *Sphères de chanfrein.*

Références

[Ber78] M. Berger. *Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*, volume 3. Cedic / Fernand Nathan, $2^{ème}$ édition, 1978. §11.8.12.

[Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[Gra92] D.J. Grabiner. Farey nets and multidimensional continued fractions. *Monatshefte für Mathematik*, 114:35–60, 1992.

[Har78] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, fifth edition, October 1978. §3.1.

[Ros66] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of ACM*, 13(4):471–494, 1966.

[Thi94] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications.* PhD thesis, UJF, Grenoble, Sept 1994. `http://www.lim.univ-mrs.fr/~thiel/these`.

[Ver91] J.H. Verwer. Local distance for distance transformations in two and three dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 12:671–682, 1991.