Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II)
Faculté des Sciences de Luminy
Laboratoire d'Informatique de Marseille

Mémoire scientifique

Habilitation à Diriger des Recherches

par

Edouard THIEL

Spécialité : Informatique

Géométrie des distances de chanfrein

Date de soutenance : 10 décembre 2001

Composition du Jury :

Maurice Nivat	Rapporteur, Président
Jean-Marc Chassery	Rapporteur
Jean-Pierre Reveillès	Rapporteur
Victor Chepoi	Examinateur, Directeur
Alain Colmerauer	Examinateur
Jean-François Maurras	Examinateur

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Informatique de Marseille (LIM) de l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II).

Je remercie M. Maurice Nivat, Professeur à l'Université Denis Diderot (Paris 7) pour l'honneur qu'il m'a fait en me proposant d'être rapporteur et en acceptant de présider mon jury d'habilitation.

Je tiens à remercier M. Jean-Marc Chassery, Directeur de Recherche CNRS au LIS de Grenoble, pour avoir immédiatement accepté la charge de rapporteur, la confiance qu'il m'a accordée et pour ses encouragements.

Je veux exprimer ici ma profonde gratitude à M. Jean-Pierre Reveillès, Professeur à l'Université d'Auvergne (Clermont 1), pour avoir accepté d'enthousiasme de rapporter ce travail, pour m'avoir donné le goût à la recherche, et avoir suivi mon évolution depuis 15 ans.

Mes plus vifs remerciements à M. Victor Chepoi, Professeur à l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2), pour avoir encouragé et relu ce travail et les conseils prodigués.

Je remercie M. Alain Colmerauer, Professeur à l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2), qui a bien voulu participer à ce jury.

J'exprime ma reconnaissance à M. Jean-François Maurras, Professeur à l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2), pour sa participation au jury et sa bienveillance.

Mes remerciements aux membre du Département d'Informatique de Luminy, pour la bonne ambiance qu'ils font régner, contribuant au plaisir du métier d'enseignant-chercheur.

À Sylvie, Antoine et Samantha, qui ont fait preuve de beaucoup de patience pendant la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Présentation

Nous proposons un ensemble de travaux concernant les distances de chanfrein dans le cadre de l'analyse d'images et de la géométrie discrète ; nous appelons ce thème de recherche « géométrie des distances de chanfrein ».

En analyse d'images, et plus précisément en représentation et description de formes, on a besoin de notions de la géométrie discrète telles que la notion de distance discrète, qui est utile pour mesurer et décrire les objets présents dans l'image. Les distances de chanfrein, encore appelées distances pondérées, sont des distances discrètes largement utilisées depuis les articles fondateurs de Borgefors [Bor84] et [Bor86], dans les transformations de distance, pour la mise en correspondance de formes (algorithme « chamfer matching »), pour le calcul de l'axe médian, du squelette pondéré, du diagramme de Voronoï généralisé discret, en morphométrie, dans les simulations de trajectoires de robot, en granulométrie, en morphologie mathématique, en compression, et même pour accélérer le lancer de rayon dans des volumes discrets.

On peut définir les distances de chanfrein de la façon suivante : le *masque de chanfrein* est un ensemble de déplacements autorisés dans un voisinage, chaque déplacement étant pondéré avec un coût ; la *distance de chanfrein* entre deux points est le coût du chemin de coût minimal les rejoignant, formé des déplacements autorisés par le masque. Les masques de chanfrein permettent d'approximer la distance euclidienne réelle d_E avec des entiers, de façon très efficace en termes de calcul, de stockage et d'exploitation. Toute une branche de la littérature dédiée s'attache à *optimiser* les masques de façon à minimiser l'erreur commise par rapport à d_E.

Un large choix de masques de chanfrein est possible, qui peuvent avoir des propriétés très diverses. Paradoxalement, très peu d'articles sont consacrés à leurs propriétés. Dans notre thèse [Thi94d], nous avons étudié les propriétés arithmétiques et géométriques des masques et des boules de chanfrein en 2D. Par la suite, nous avons souhaité étudier les propriétés des masques de chanfrein en 3D, qui s'avèrent bien plus riches et complexes. Nous avons proposé ce sujet à Eric Remy et dirigé entièrement sa thèse [Rem01], qui a abouti en même temps que notre travail.

Notre collaboration nous a rapidement amené à remettre à plat la construction théorique qui était faite dans [Thi94d], qui d'une part ne passait pas en 3D, et d'autre part s'avérait erronée sur certains points. Notre approche a évolué au fil du temps et ce n'est que très récemment que nous avons découvert une construction théorique satisfaisante, et en particulier où intervient exactement la notion de convexité. Remy effectue dans sa thèse une étude très poussée sur les masques de chanfrein dans $\mathbb{Z}^3$, avec de nombreuses études de cas. Dans ce document, nous proposons une étude plus générale dans un module en dimension finie, avec d'autres constructions et preuves.

Le début du document se veut très didactique, avec de nombreux renvois bibliographiques et

des liens aux domaines de recherche connexes. Notre contribution est centrée sur trois volets :

- ▷ L'étude du rôle des pondérations dans un masque de chanfrein, de façon à produire une condition suffisante de norme discrète. Pour ce faire, nous plongeons le masque dans $\mathbb{R}^n$ et relevons ses propriétés, puis revenons dans $\mathbb{Z}^n$ et testons si les propriétés sont conservées.
- ▷ La construction de normes discrètes à partir de contraintes sur les pondérations, obtenues par des critères de convexité locale sur certaines facettes, puis l'optimisation de masques de normes par énumération.
- ▷ Le calcul efficace des tables de correspondance et des voisinages de test pour le calcul de l'axe médian, et la justification de ces algorithmes ; l'application de la méthode à d_E.

Nous verrons au fil du document que les propriétés ou algorithmes proposés ouvrent la porte à de nouvelles questions arithmétiques très intéressantes. Nous y reviendrons dans la conclusion générale.

1.2 Plan du mémoire et résumé

Le document est organisé de la façon suivante :

Chapitre 2 : Préliminaires

Nous introduisons dans ce chapitre la plupart des notions et définitions qui seront utiles pour l'étude des distances de chanfrein. Nous commençons par rappeler les axiomes des distances et des normes. Toute la présentation est faite dans un module en dimension n finie sur un anneau commutatif A. Ceci permet de considérer de la même façon $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Z}^n$, avec une notion cohérente pour l'homogénéité des normes, les combinaisons convexes et les chemins pour un masque de chanfrein.

Nous rappelons ensuite des définitions classiques relatives à la convexité et aux polytopes en géométrie euclidienne, sur lesquels s'appuie l'étude du rôle des pondérations au chapitre 4. La convexité discrète ainsi que d'autres formes de convexité sont mentionnées. Le lien entre convexité et norme est étudié dans le cadre classique des distances de jauges et des fonctions convexes, pour montrer que la convexité n'est pas un critère de norme si on n'a pas l'homogénéité ; or ce point est le plus délicat à obtenir dans l'espace discret.

L'espace discret et les notions classiques de voisinages et de connexité sont définis en dimension n. Nous relions ce vocabulaire de la géométrie discrète avec celui des polytopes et nous en déduisons quelques propriétés combinatoires sur les voisinages discrets.

Enfin nous présentons des rappels sur la géométrie des nombres, en particulier sur les réseaux unimodulaires de $\mathbb{Z}^n$, dans lesquels tous les points de $\mathbb{Z}^n$ sont atteints. Cette propriété sera employée pour montrer l'homogénéité dans les cônes d'influence des boules de chanfrein. Les notions de G-symétrie et de générateur $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$ ou $\mathrm{G}(\mathbb{R}^n)$ sont définies dans le but de simplifier l'étude des masques de chanfrein.

Chapitre 3 : Transformations de distances

Nous présentons le concept de transformation de distance (DT) dans une image discrète, les différentes approches et les principales applications. Nous passons ensuite en revue les grandes familles de distances couramment employées en analyse d'image, présentons leurs caractéristiques, les algorithmes de calcul et des exemples.

Nous commençons par les distances de connexité, qui ont été introduites par Rosenfeld et Pfaltz dans [Ros66] et [Ros68]. Elles permettent un calcul très efficace en deux balayages sur l'image, mais n'approximent la distance euclidienne d_E que grossièrement, ce qui peut être très gênant dans certaines applications. Nous parlons ensuite des distances octogonales. Ce sont des combinaisons des distances de connexité, qui améliorent sensiblement l'approximation de d_E, mais à un degré limité par rapport aux distances de chanfrein.

Les nombreux algorithmes proposés pour la distance euclidienne sont répertoriés. Les premiers sont efficaces mais produisent des erreurs dans certaines configurations, d'autres sont exacts mais plus lents, les plus récents sont complexes à mettre en œuvre ; la majorité d'entre eux passe difficilement en dimension n. Le meilleur compromis semble être l'algorithme de Saito et Toriwaki [Sai94].

Nous consacrons la dernière partie à une présentation plus détaillée des distances de chanfrein, avec un rappel de leur précurseur Montanari [Mon68], puis les articles fondateurs de Borgefors [Bor84] et [Bor86], suivis par les principaux travaux autour de l'optimisation des masques pour approximer d_E. Nous redonnons enfin les algorithmes DT et DT inverse, qui par leur simplicité et leur efficacité ont assuré le succès des distances de chanfrein.

Chapitre 4 : Propriétés fondamentales des masques de chanfrein

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés théoriques des masques de chanfrein. Nous commençons par analyser une galerie de boules aux propriétés très diverses pour justifier le besoin de classification des masques et l'intérêt d'avoir une norme ; puis nous présentons l'historique de la découverte des propriétés ou des erreurs dans la littérature.

Nous développons ensuite notre approche. Nous définissons de façon très générale les masques de chanfrein dans un module en dimension finie, et montrons que, contrairement à certaines croyances, un masque de chanfrein définit toujours une distance. De plus, tout masque de chanfrein induit une norme dans un espace vectoriel.

De là, nous procédons dans $\mathbb{R}^n$ à une étude des chemins minimaux au travers de leur représentation dans un espace projectif. Nous montrons que les chemins projetés forment un polytope, qui est l'enveloppe convexe de la projection des pondérations, et que les chemins minimaux correspondent aux points frontières du polytope. Nous en déduisons le rôle des pondérations dans un masque à partir des points extrêmes du polytope. Nous définissons ensuite les cônes d'influence correspondant aux facettes du polytope, ainsi que les déplacements élémentaires, et donnons des formules directes de distance et de normales aux facettes.

Enfin, nous replongeons ces résultats dans $\mathbb{Z}^n$ et en déduisons une condition suffisante de norme discrète. L'homogénéité dans un cône d'influence est garantie si les pondérations qui délimitent le cône sont la base d'un réseau unimodulaire. Pour conclure nous introduisons la notion de spectre d'un masque, qui permet de visualiser si un masque définit une norme discrète.

Chapitre 5 : Construction de normes

Nous avons présenté notre étude fondamentale au chapitre 4 sans faire appel à la notion de point visible. Nous en faisons usage dans ce chapitre pour construire des normes discrètes. Nous rappelons la définition des points visibles, des suites et des ensembles de Farey, et montrons quelles propriétés les lient. Nous étudions ensuite les triangulations de Farey compatibles.

Nous proposons une construction de normes discrètes qui exploite le cadre théorique défini au chapitre 4, à partir des triangulations de Farey et des contraintes de convexité locales (CCL). La méthode est plus particulièrement développée dans $\mathbb{Z}^3$, et les CCL sont traduites en systèmes de contraintes sur les pondérations.

Des études de cas sont menées pour détailler la mise en œuvre complète du procédé, et expliquer l'apparition de certains phénomènes, tels que les triangulations transverses et les masques complétés. Enfin nous procédons à une optimisation de masques de normes en énumérant les masques dans l'espace des contraintes, et proposons de nouveaux masques optimaux et des exemples de boules en 3D.

Chapitre 6 : Axe médian

Nous rappelons les définitions classiques de boule maximale et d'axe médian. Nous passons en revue les méthodes existantes pour extraire l'axe médian à partir d'une image de distances, et montrons qu'elles ne sont valides que pour quelques cas simples, en particulier à cause de la présence de boules équivalentes. Nous rappelons ensuite le principe de la méthode générale qui consiste à utiliser des tables de correspondance sur des tests locaux ; le problème majeur est l'obtention de ces tables, qui se heurte à une combinatoire explosive.

Nous proposons un algorithme particulièrement efficace qui calcule ces tables pour toute norme de chanfrein en dimension finie, et montrons un résultat essentiel, qui est que le voisinage de test ne correspond pas forcément au masque de chanfrein employé. Nous proposons et justifions un second algorithme qui calcule le voisinage de test nécessaire et suffisant, et le valide jusqu'à un rayon de boule donné.

Nous appliquons ensuite ces algorithmes à des masques de normes de la littérature en 2D et 3D, et exhibons des cas où le voisinage de test est égal ou différent du masque de chanfrein, avec une discussion sur les phénomènes rencontrés et les temps de calcul.

Nous adaptons enfin notre approche à la fonction entière d_E^2, et montrons expérimentalement que le voisinage de test croît avec le rayon de la plus grande boule dans l'image, autrement dit que le voisinage de test n'est pas borné pour une image de taille quelconque, contrairement aux distances de chanfrein. De plus le coût en temps de calcul et en mémoire devient vite prohibitif pour d_E^2, ce qui renforce l'intérêt des distances de chanfrein.

Nous terminons le chapitre en laissant entrevoir de très intéressantes propriétés arithmétiques pour une étude future.

Chapitre 2

Préliminaires

Nous introduisons dans ce chapitre la plupart des notions et définitions dont nous aurons besoin pour aborder les distances de chanfrein dans la suite du document. Ces notions sont empruntées aux domaines de la topologie (§2.2), de la convexité (§2.3), de la géométrie discrète (§2.4) et de la géométrie des nombres (§2.5). Nous en profitons pour relier différents vocabulaires et approfondir quelques points.

2.1 Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit E et F des ensembles ; on note $E \setminus F = \{\, x \in E \,:\, x \notin F \,\}$, $E_* = E \setminus \{0\}$, $E_+ = \{\, x \in E \,:\, 0 \leqslant x \,\}$, $E_k = \{\, x \in E \,:\, 0 \leqslant x \leqslant k \,\}$, et $\#E$ le cardinal de l'ensemble E. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $E^n = E \times \cdots \times E$ (avec n termes) ; dans la suite du document on considère toujours n fini. Soit $\lambda \in E^n$; ses composantes sont indicées par $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Réciproquement, une suite (λ_i) où $\lambda_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est notée de façon abrégée $\lambda \in E^n$.

La partie entière inférieure d'un réel x est $\lfloor x \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leqslant x \,\}$, la partie entière supérieure de x est $\lceil x \rceil = \min\{\, n \in \mathbb{Z} \,:\, n \geqslant x \,\}$.

Soit x et y deux entiers ; on dit que x divise y, et on note $x \mid y$, si il existe un entier λ tel que $\lambda x = y$. Dans le cas contraire on note $x \nmid y$. Le plus grand commun diviseur de k entiers $x_1, ..., x_k$ est défini par $\mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_k) = \max\{\, p \in \mathbb{N} \,:\, p \mid x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k \,\}$. Lorsque $\mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_k) = 1$ on dit que les entiers $x_1, ..., x_k$ sont premiers entre eux. La forme irréductible de $x_1, ..., x_k$ est définie par $\mathrm{irred}(x_1, ..., x_k) = (\frac{x_1}{p}, ..., \frac{x_k}{p})$ où $p = \mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_k)$.

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est défini par $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. De nombreuses propriétés de $\binom{n}{p}$ sont recensées dans [Gra98, chap. 5].

2.2 Topologie

Dans la littérature mathématique, distances et normes sont définies à valeurs réelles, et un espace vectoriel est défini sur un corps (voir par exemple [Bou74, vol. TG]) ; nous les étendons ici dans un espace continu ou discret avec des valeurs réelles ou entières. Nous présentons d'abord les axiomes d'une distance et des exemples au §2.2.1, puis les axiomes d'un module au §2.2.2 ; enfin nous définissons une norme dans un module et l'association avec une distance au §2.2.3.

2.2.1 Distance

La notion de distance est très souvent définie à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous étendons la définition aux valeurs dans un sous-groupe de $\mathbb{R}$, ce qui nous permet de considérer les distances à valeurs

dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$, appelées respectivement distances *réelles*, *rationnelles* ou *discrètes*.

Définition 2.1 (Distance) *Soit E un ensemble non vide et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Une distance sur E à valeurs dans F, notée (d, E, F), est une application $d : E \times E \to F$ vérifiant :*

$$\textit{(positive)} \quad \forall\, p, q \in E, \quad d(p, q) \geqslant 0 \,; \tag{2.1}$$
$$\textit{(définie)} \quad \forall\, p, q \in E, \quad d(p, q) = 0 \;\Leftrightarrow\; p = q \,; \tag{2.2}$$
$$\textit{(symétrique)} \quad \forall\, p, q \in E, \quad d(p, q) = d(q, p) \,; \tag{2.3}$$
$$\textit{(triangulaire)} \quad \forall\, p, q, r \in E, \quad d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q) \,. \tag{2.4}$$

Si d est une distance, on dit encore que (E, F, d) est un *espace métrique*. Notre définition pour $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, d)$ coïncide bien avec celle de Rosenfeld et Pfaltz dans [Ros68]. La condition triangulaire (2.4) est encore appelée *inégalité triangulaire*. Classiquement, une distance d non définie (2.2), vérifiant $d(p, p) = 0$ pour tout $p \in E$ mais ne vérifiant pas $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$ pour tout $p, q \in E$, est appelée un *écart*. On peut être également amené à considérer des distances ne vérifiant pas la symétrie (2.3), par exemple pour les distances entre chaînes de caractères. Dans la littérature anglophone, les termes sont très souvent échangés : une distance est appelée une « métrique », un écart est une « semi-métrique », un écart ne vérifiant pas l'inégalité triangulaire (2.4) est une « distance » (voir par exemple [Dez97]).

La distance la plus naturelle est la *distance euclidienne*, définie pour deux points de $\mathbb{R}^n$ $p = (p_1, ..., p_n)$ et $q = (q_1, ..., q_n)$ par

$$d_E(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2} \,, \tag{2.5}$$

qui est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si p et q sont dans $\mathbb{Z}^n$, le carré d_E^2 présente l'intérêt d'être à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La fonction d_E^2 est utilisée en analyse d'images sous le nom de *pseudo-distance euclidienne*. En effet, cette fonction n'est pas une distance, car elle ne respecte pas l'inégalité triangulaire (2.4) : par exemple, soit $A = (1, 0 \cdots 0)$ et $B = (2, 0 \cdots 0)$; on a $d_E^2(O, A) = d_E^2(A, B) = 1$ et $d_E^2(O, B) = 4$, donc $d(O, B) \nleqslant d(O, A) + d(A, B)$.

Les premières véritables distances discrètes à avoir été employées en analyse d'image sont

$$d_1(p, q) = |q_1 - p_1| + \cdots + |q_n - p_n| \,, \tag{2.6}$$
$$d_\infty(p, q) = \max\{\, |q_1 - p_1|, \ldots, |q_n - p_n| \,\} \,. \tag{2.7}$$

Dans $\mathbb{Z}^n$, la distance d_1 est parfois appelée *ℓ_1-metric* ou *grid metric*, et plus spécifiquement dans le cas $n = 2$, *Manhattan*, *city block* [Ros68], *taxi-cab* ou *rectilinear metric* ; la distance d_∞ est appelée *ℓ_∞-*, *lattice*, *Chebyshev* ou *uniform metric*, et dans le cas $n = 2$, *chessboard* ou *square metric* [Ros68]. On a coutume de noter ces distances respectivement d_4 et d_8 dans $\mathbb{Z}^2$, d_6 et d_{26} dans $\mathbb{Z}^3$, à cause du nombre de points dans leur boule unité. De nombreuses autres distances discrètes sont utilisées en analyse d'images ; pour un tour d'horizon historique, voir par exemple [Mel91].

Un autre exemple de distance discrète est la distance de Hamming d_H définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$d_H(p, q) = \#\{\, i \in [1, n] \,:\, p_i \neq q_i \,\} \tag{2.8}$$

qui donne le nombre de composantes pour lesquelles ces éléments diffèrent. Cette distance est très utilisée dans les codes correcteurs (voir par exemple [Pap95]). On observe que $d_H = d_1$ sur $\{-1, 0, 1\}^n$.

Définition 2.2 (Boule) *Soit (d, E, F) une distance, $p \in E$ et $r \in F$. La boule B_d de centre p et de rayon r est*

$$B_d(p, r) = \{\, q \in E \,:\, d(p, q) \leqslant r \,\} \,. \tag{2.9}$$

Cette définition correspond topologiquement parlant à une boule fermée. Pour simplifier les notations on remplace souvent $B_{d_\star}$ par $B_\star$. Ainsi, on écrit B_1, B_E et B_∞ à la place de B_{d_1}, B_{d_E} et B_{d_∞}. On représente figure 2.1 ces boules en dimension 2, qui sont en forme de losange, de cercle et de carré ; on verra pourquoi elles sont emboîtées à la fin de §2.2.3.

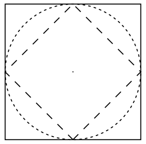


FIG. 2.1 – *Les boules des distances d_1, d_E et d_∞ en dimension 2.*

Définition 2.3 (Distance à un ensemble) *Soit (d, E, F) une distance, $p \in E$ et X un sous-ensemble compact non vide de E. La distance entre p et X est*

$$d(p, X) = \min\big\{\, d(p, q) \;:\; q \in X \,\big\}\,. \tag{2.10}$$

Si (d, E, F) est une distance et si X et Y sont des sous-ensembles compacts non vides de E, on définit la distance entre X et Y par

$$d(X, Y) = \min\big\{\, d(p, q) \;:\; p \in X,\, q \in Y \,\big\} \tag{2.11}$$

et la distance de Hausdorff entre X et Y par

$$H_d(X, Y) = \max\Big\{ \max\big\{\, d(p, Y) \;:\; p \in X \,\big\}\,,\ \max\big\{\, d(q, X) \;:\; q \in Y \,\big\} \Big\}\,. \tag{2.12}$$

2.2.2 Espace vectoriel ou module

La structure d'espace vectoriel (EV) est utile pour définir une norme. Un EV est défini sur un corps commutatif K. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, alors K^n est un EV sur K. Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est un EV sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^n$ est un EV sur $\mathbb{Q}$. Par contre, $\mathbb{Z}$ est un anneau et non un corps, donc on ne peut pas définir $\mathbb{Z}^n$ comme un EV sur $\mathbb{Z}$.

La solution est donnée par l'algèbre commutative, où la notion de *module* généralise celle d'EV. La définition d'un module sur un anneau commutatif A s'obtient tout simplement en remplaçant dans la définition des EV le corps K par l'anneau A. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, alors A^n est un module sur A. Par exemple, $\mathbb{Z}^n$ est un module sur $\mathbb{Z}$. Un EV est aussi un module, donc $\mathbb{R}^n$ est un module sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^n$ est un module sur $\mathbb{Q}$.

Par rapport à un EV, on perd dans un module principalement l'inversibilité des scalaires ; il peut aussi y avoir des problèmes sur les bases. Pour approfondir le sujet, voir par exemple [Bou74, vol. AC]. On rappelle ici les axiomes d'un module ; ceux-ci nous permettront de définir proprement la notion d'homogénéité dans une norme au §2.2.3.

Définition 2.4 (Module) *Soit A un anneau commutatif, d'éléments neutres notés 0 et 1. On dit qu'un ensemble E est un module sur A (ou A-module), noté (E, A), si E est muni d'une loi interne (notée additivement) de groupe commutatif, et d'une loi externe (notée multiplicativement) satisfaisant :*

(identité)	$\forall\, \vec{x} \in E,$	$1\vec{x} = \vec{x}\,;$	(2.13)
(associativité)	$\forall\, \vec{x} \in E,\, \forall\, \lambda, \mu \in A,$	$\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}\,;$	(2.14)
(distributivité des scalaires)	$\forall\, \vec{x} \in E,\, \forall\, \lambda, \mu \in A,$	$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}\,;$	(2.15)
(distributivité des éléments)	$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\, \forall\, \lambda \in A,$	$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}\,.$	(2.16)

Soit (E, A) un module ; des vecteurs $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ de E sont dit *linéairement indépendants*, ou encore, forment une famille *libre*, si

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i \vec{v}_i \;=\; \vec{0}, \quad \alpha \in A^k, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\,. \tag{2.17}$$

La *dimension* de E, notée $\dim(E)$, est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de E ; par exemple $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{Q}^n) = \dim(\mathbb{Z}^n) = n$. La dimension de E est aussi le cardinal de toute base de E. Une *base* de E est un ensemble de vecteurs $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ de E tels que

$$\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists\, \alpha \in A^n, \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \vec{v}_i \;=\; \vec{u}\,. \tag{2.18}$$

Toute base de E est linéairement indépendante ; la réciproque est vraie pour un espace vectoriel (par exemple pour $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$) mais pas toujours pour un module. Par exemple dans le module $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$, les vecteurs $(2, 0)$ et $(0, 1)$ sont linéairement indépendants, mais ne forment pas une base car le vecteur $(1, 0)$ n'est pas atteint par une combinaison linéaire. On verra par la suite que ce problème de vecteur (ou de point) non atteint est un problème central.

Soit (E, A) un module et soit F un espace ponctuel. On dit que F est un *espace affine* attaché à E s'il est muni d'une opération notée $+$ telle que

$$\forall\, p, q \in F,\ \exists\, \vec{x} \in E, \qquad q = p + \vec{x}\,; \tag{2.19}$$

ce vecteur $\vec{x}$ est noté $\overrightarrow{pq} = q - p$. Pour tout module il existe un espace affine qui lui est attaché et réciproquement ; ces espaces ont toujours même dimension. Soit O un point de F, alors (F, O) est un espace affine muni d'une origine. Une origine est nécessaire pour former une base de F, et permet de définir les opérations suivantes :

$$\forall\, p, q \in F,\ \forall\, \lambda \in A, \qquad \lambda p = O + \lambda\overrightarrow{Op}\,; \quad p + q = O + \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{Oq}\,. \tag{2.20}$$

Dans la suite, on considérera plus particulièrement les modules $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$ et $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, attachés respectivement aux espaces affines $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ et $\mathbb{Z}^n$, munis de l'origine $O = (0 \cdots 0)$ et de la base *canonique* $\{\, (1, 0 \cdots 0), (0, 1, 0 \cdots 0), ..., (0 \cdots 0, 1) \,\}$.

2.2.3 Norme

Nous définissons une norme sur un module, qui généralise la notion d'espace vectoriel comme on l'a vu au §2.2.2. Les normes à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$ sont appelées respectivement normes *réelles*, *rationnelles* ou *discrètes*.

Définition 2.5 (Norme) *Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Une norme sur (E, A) à valeurs dans F est une application $g : E \to F$ vérifiant :*

(positive)	$\forall\, \vec{x} \in E,$	$g(\vec{x}) \geqslant 0\,;$	(2.21)
(définie)	$\forall\, \vec{x} \in E,$	$g(\vec{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \vec{0}\,;$	(2.22)
(triangulaire)	$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,$	$g(\vec{x} + \vec{y}) \leqslant g(\vec{x}) + g(\vec{y})\,;$	(2.23)
(homogène)	$\forall\, \vec{x} \in E,\, \forall\, \lambda \in A,$	$g(\lambda\vec{x}) = \lvert\lambda\rvert\, g(\vec{x})\,.$	(2.24)

Si g est une norme sur (E, A) à valeurs dans F, on dit encore que (E, A, F, g) est un *espace normé*. Dans l'homogénéité (2.24) on utilise le fait que $\forall \vec{x} \in E$ et $\forall \lambda \in A$ on a $\lambda\vec{x} \in E$. La condition triangulaire (2.23) est encore appelée *sous-additive* ; une autre forme de (2.23) est

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \qquad \big|g(\vec{x}) - g(\vec{y})\big| \leqslant g(\vec{x} - \vec{y})\,. \tag{2.25}$$

Classiquement, une norme g non définie (2.22), vérifiant $g(\vec{0}) = 0$ mais ne vérifiant pas $g(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ pour tout $\vec{x} \in E$, est appelée une *semi-norme*. On dit que deux normes g et h sont *équivalentes* s'il existe des constantes A et B positives telles que $\forall \vec{x}$ on a $A\,g(\vec{x}) \leqslant h(\vec{x}) \leqslant B\,g(\vec{x})$. Toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes. Le lemme suivant permet de lier normes et distances en se servant de (2.19) et (2.20) :

Lemme 2.1 *Soit $g : E \to F$ une norme sur A, alors l'application $d : E \times E \to F$ définie par $d(p,q) = g(q-p)$ est une distance (appelée* distance associée *à g) qui de plus vérifie :*

$$\text{(invariante par translation)} \quad \forall\, p,q,r \in E, \quad d(p+r, q+r) = d(p,q)\,; \tag{2.26}$$
$$\text{(homogène)} \quad \forall\, p,q \in E,\ \forall\, \lambda \in A, \quad d(\lambda p, \lambda q) = |\lambda|\, d(p,q)\,. \tag{2.27}$$

Réciproquement, soit $d : E \times E \to F$ une distance, alors l'application $g : E \to F$ définie par $g(q-p) = d(p,q)$ est une norme (appelée norme induite*) si d satisfait* (2.26) *et* (2.27).

Par exemple, les normes ℓ_p sont définies pour $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$, par

$$p \in \mathbb{N}_*\,, \quad \ell_p(\vec{x}) = \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.28}$$

On note souvent $||\,\vec{x}\,||_p = \ell_p(\vec{x})$. On a en particulier

$$\ell_1(\vec{x}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|\,, \quad \ell_2(\vec{x}) = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^2}, \quad \ell_\infty(\vec{x}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|\,. \tag{2.29}$$

On remarque que les distances associées à ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_∞ par le lemme 2.1 sont respectivement d_1, d_E et d_∞, introduites au §2.2.1. On a de plus l'inégalité

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \ell_\infty(\vec{x}) \leqslant \ell_2(\vec{x}) \leqslant \ell_1(\vec{x}) \leqslant n\,\ell_\infty(\vec{x})\,, \tag{2.30}$$

qui est un cas particulier de l'inégalité de Jensen (voir par exemple [Jen06], [Har51] et [Bec65]). On en déduit l'inclusion des boules $B_1 \subseteq B_E \subseteq B_\infty$ observée à la figure 2.1.

2.3 Convexité

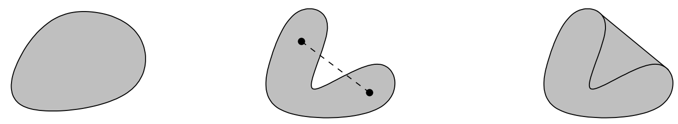
La convexité est au cœur de multiples domaines de recherche. Notion connue depuis l'antiquité, elle a été considérablement développée depuis les travaux d'Euler au 18$^{\text{e}}$ siècle. Nous rappelons d'abord au §2.3.1 les définitions de la convexité euclidienne, puis nous traitons de la convexité discrète au §2.3.2. Nous présentons au §2.3.3 des définitions et résultats classiques de la théorie des polytopes. Nous étudions enfin la convexité des boules de normes au §2.3.4.

2.3.1 Convexité dans l'espace euclidien

Nous commençons par donner une définition *géométrique* de la convexité : dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si tout segment joignant deux points de X est contenu dans X (voir figure 2.2) ; autrement dit si

$$\forall\, p,q \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\,, \quad \lambda p + (1-\lambda) q \in X\,. \tag{2.31}$$

L'intersection de deux convexes est encore un convexe. La convexité est aussi stable par translation, homothétie, application affine, image réciproque d'une application affine, somme de Minkowski, projection sur un sous-espace, union croissante. De nombreuses autres propriétés peuvent être trouvées dans [Ber90, chap. 11].



(a) (b) (c)

FIG. 2.2 – *Ensemble convexe (a), non-convexe (b) et son enveloppe convexe (c) dans $\mathbb{R}^2$.*

L'*enveloppe convexe* de $X \subset \mathbb{R}^n$, notée $\mathrm{conv}(X)$, est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant X, ou encore l'intersection de tous les convexes (en particulier des demi-espaces) contenant X. Il existe de nombreux algorithmes de calcul de l'enveloppe convexe, qui constituent une branche entière de la géométrie algorithmique [Boi95] [Pre85].

La définition *affine* de la convexité (voir [Boi95, chap. 7]) est équivalente à la définition géométrique dans l'espace euclidien. Soit $p_1, ..., p_k$ des points de $\mathbb{R}^n$. On appelle *combinaison linéaire* de $p_1, ..., p_k$ un point $q = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$ où $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Si de plus $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, alors q est appelé le *barycentre* de $p_1, ..., p_k$ à coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_k$, et on dit que $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ sont des *coordonnées barycentriques* de q par rapport à $p_1, ..., p_k$.

On appelle *combinaison convexe* de $p_1, ..., p_k$ un barycentre de ces points à coefficients positifs. L'*enveloppe convexe* de $p_1, ..., p_k$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $p_1, ..., p_k$:

$$\mathrm{conv}(p_1, ..., p_k) = \Big\{ \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k \,:\, \lambda \in \mathbb{R}_+^k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 \Big\}. \tag{2.32}$$

Finalement, un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si $X = \mathrm{conv}(X)$. Nous présentons maintenant des théorèmes classiques en dimension finie, qui seront utilisés dans la suite du document.

Théorème 2.1 (Carathéodory) *Dans $\mathbb{R}^n$, toute combinaison convexe de m points, $m > n+1$, se ramène à une combinaison convexe de $n+1$ de ces points* [Gru67, §2.3] [Ber90, §11.1.8.6].

Une autre forme de ce théorème est que l'enveloppe convexe d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est égal à l'union des ensembles de combinaisons convexes de $n+1$ points de X. On peut aussi reconstruire un ensemble convexe à partir de certains de ses points. Soit X un ensemble convexe et $p \in X$, on dit que p est un point *extrémal* si $X \setminus p$ est encore convexe.

Théorème 2.2 (Krein et Milman) *Un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux* [Ber90, §11.6.8].

Le résultat suivant permet de caractériser localement un ensemble convexe. Un point p d'un ensemble X est dit *localement convexe* s'il existe un voisinage N de p différent de $\{p\}$ tel que $N \cap X$ est convexe.

Théorème 2.3 (Tietze) *Un compact de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si tous ses points sont localement convexes* [Tie28] [She88].

2.3.2 Convexité dans l'espace discret

La convexité peut être définie de multiples manières. Au §2.3.1 , nous avons donné une définition géometrique et une définition affine de la convexité dans l'espace euclidien. La définition géométrique (inclusion des segments), qui est très simple dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Q}^n$, n'est malheureusement pas immédiatement transposable dans $\mathbb{Z}^n$ sans prendre quelques précautions. De nombreuses définitions de la convexité discrète ont été recensées dans une étude bibliographique de Ronse

[Ron89]. Le passage entre analogique et discret est étudié dans [Cha91, chap. 5], ainsi que la notion intermédiaire de XY-convexité ; les liens entre convexités discrètes et connexités sont approfondis dans [Dau00], de même que la notion de Q-convexité .

La définition affine de la convexité passe très naturellement dans $\mathbb{Z}^n$ pour une composante connexe (voir §2.4.3) ; de plus, c'est sous cette forme que la propriété de convexité apparaît le mieux dans l'étude des boules de chanfrein au chapitre 4. Nous adaptons ici les définitions à un module :

Soit (E, O) un espace affine muni d'une origine et attaché à un module sur un anneau commutatif A. Soit $p_1, ..., p_k$ des points de E. On appelle *combinaison linéaire* de $p_1, ..., p_k$ un point $q = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$ où $\lambda \in A^k$; ce point q appartient toujours à E. Si A n'est pas un corps (par exemple $A = \mathbb{Z}$), on perd l'inversibilité des scalaires et la condition $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ devient caduque. On définit donc dans le cas général le *barycentre* de $p_1, ..., p_k$ à coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_k$ comme étant le point

$$q = \frac{\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \,:\, \lambda \in A^k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \neq 0\,; \tag{2.33}$$

par contre, il est à noter que ce point q n'appartient pas forcément à E. L'*enveloppe convexe* de $p_1, ..., p_k$ est l'ensemble des combinaisons convexes (c'est-à-dire des barycentres à coefficients positifs) de $p_1, ..., p_k$ qui sont dans E :

$$\operatorname{conv}(p_1, ..., p_k) = \left\{ q = \frac{\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \,:\, q \in E,\ \lambda \in (A^k_+)_* \right\}. \tag{2.34}$$

D'autres approches de la convexité sont proposées dans la littérature. Une approche *axiomatique* est formulée par Knuth en dimension 3 [Knu92], puis généralisée par Delpias en dimension n [Del01]. La convexité est définie sans espace affine ni coordonnées, mais par des relations entre points, sous la forme de matroïdes orientés (voir références dans [Del01, §2.4]), et matérialisées par un déterminant ; la convexité peut ensuite se traduire sous une forme géométrique, et s'applique aussi bien dans $\mathbb{R}^n$ que dans $\mathbb{Z}^n$. Nous mentionnons enfin des approches *ensemblistes*, telles que les structures convexes dans les graphes (où l'intersection de deux convexes est convexe) [Vel93], ou encore la convexité abstraite dans les greedoides (avec la propriété d'anti-échange) [Kor91].

2.3.3 Polytopes en géométrie euclidienne

Les polytopes sont la généralisation des polygones convexes en dimension n. La théorie des polytopes est approfondie dans [Gru67], [Mul71], [Boi95, chap. 7–10] et [Ber90, chap. 12].

On appelle *polytope* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, ou encore l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces. On dit que H est un *hyperplan support* d'un polytope $\mathcal{P}$ si $H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ et si $\mathcal{P}$ est inclus dans l'un des deux demi-espaces fermés séparés par H. Une *face* de $\mathcal{P}$ est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'un de ses hyperplans support. Ces faces sont elles-mêmes des polytopes de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \in [0, n-1]$, que l'on appelle des *k-faces propres*. Les 0-, 1-, 2- et 3-faces sont des sommets, arêtes, polygones et polyèdres. Une $(n-1)$-face est appelée une *facette*. On considère enfin $\emptyset$ et $\mathcal{P}$ comme une (-1)-face et une n-face, dites *impropres*. La relation d'Euler [Boi95, §7.2.1] s'applique à tous les polytopes :

Théorème 2.4 (Relation d'Euler) *Soit $\mathcal{P}$ un n-polytope ; alors les nombres $F^n_k(\mathcal{P})$ de k-faces propres et impropres de $\mathcal{P}$ vérifient la relation :*

$$\sum_{-1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k\ F^n_k(\mathcal{P}) \,=\, 0\,. \tag{2.35}$$

Un *k-simplexe* est l'enveloppe convexe de $k+1$ points linéairement indépendants. Par exemple les 0-, 1-, 2- et 3-simplexes sont des sommets, arêtes, triangles et tétraèdres. Un polytope est dit *simplicial* si toutes ses faces propres sont des simplexes, ou encore, si chacune de ses facettes a n sommets. Un polytope *simple* est un polytope dont le dual est simplicial, ou encore, dont chaque sommet appartient à exactement n facettes. Les simplexes sont les seuls polytopes qui sont à la fois simples et simpliciaux. Les relations de Dehn-Sommerville [Boi95, §7.2.2] s'appliquent aux polytopes simples (par exemple aux k-cubes, voir §2.4.2) :

Théorème 2.5 (Relations de Dehn-Sommerville) *Soit $\mathcal{P}$ un n-polytope simple ; alors les nombres $F^n_k(\mathcal{P})$ de k-faces de $\mathcal{P}$ vérifient les $n+1$ relations :*

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (-1)^j \binom{n-j}{n-k} F^n_j(\mathcal{P}) \,=\, F^n_k(\mathcal{P})\,, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)\,. \tag{2.36}$$

Par exemple, les relations de Dehn-Sommerville pour un 4-polytope simple sont

$$\begin{cases} 1\,F^4_0 & & & & & = F^4_0 \\ 4\,F^4_0 & -1\,F^4_1 & & & & = F^4_1 \\ 6\,F^4_0 & -3\,F^4_1 & +1\,F^4_2 & & & = F^4_2 \\ 4\,F^4_0 & -3\,F^4_1 & +2\,F^4_2 & -1\,F^4_3 & & = F^4_3 \\ 1\,F^4_0 & -1\,F^4_1 & +1\,F^4_2 & -1\,F^4_3 & +1\,F^4_4 & = F^4_4\,. \end{cases} \tag{2.37}$$

On voit très logiquement apparaître le triangle de Pascal [Gra98, chap. 5] dans les coefficients ; la dernière ligne est la relation d'Euler.

2.3.4 Convexité des boules de normes

Dans cette section nous faisons le lien entre convexité et norme. Nous commençons par introduire les fonctions convexes, qui sont étudiées en détail dans [Ber90, chap. 11], puis un type important de fonctions convexes, les jauges, approfondies dans [Egg69, chap. 3].

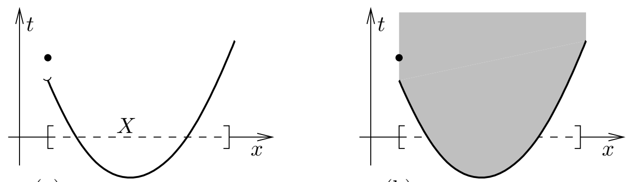
Soit X l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est appelée une *fonction convexe* si

$$\forall\, x, y \in X,\ \forall\, \lambda \in [0, 1], \quad f\big((1-\lambda)\, x + \lambda\, y\big) \leqslant (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y)\,. \tag{2.38}$$

On peut reformuler cette définition à partir de l'*épigraphe* de f, qui est l'ensemble

$$E_f = \big\{\, (x, t) \in X \times \mathbb{R} \,:\, t \geqslant f(x) \,\big\}\,; \tag{2.39}$$

la fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.



(a) (b)

FIG. 2.3 – *Fonction convexe (a) et son épigraphe (b).*

Comme on le voit figure 2.3, une fonction convexe n'est pas nécessairement continue, ni bornée, ni positive. On rappelle qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *sous-additive* si $f(x+y) \leqslant$

$f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in X$, et dite *positivement homogène* si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si f est positivement homogène et sous-additive, alors f est une fonction convexe sur X, puisque

$$f\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) \leqslant f\big((1-\lambda)\,x\big) + f(\lambda\,y) = (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(y) \tag{2.40}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$. En particulier, les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions convexes.

Si f est une fonction convexe sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$, alors les ensembles

$$C_f(t) = \{\, x \in X \,:\, f(x) \leqslant t \,\} \tag{2.41}$$

sont des ensembles convexes, pour tout t réel. On en déduit que les boules de normes sont toujours convexes. On peut encore raffiner le lien entre les axiomes avec ce lemme :

Lemme 2.2 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs $\geqslant 0$ et positivement homogène sur X ; alors f est sous-additive sur X si et seulement si $C_f(1)$ est convexe* [Mau00, §1.1].

On dit que f est une *jauge* sur X si f est une fonction convexe et positivement homogène. Par exemple, les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont des jauges. Le lemme suivant donne un moyen commode pour construire une norme à partir d'un convexe compact symétrique :

Lemme 2.3 *Soit C un convexe compact contenant O dans son intérieur, alors*

$$f_C(x) = \min\{\, \lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \lambda\, C \,\} \tag{2.42}$$

est une jauge ; de plus f_C est une norme si et seulement si C est symétrique [Ber90, §11.8.12.2].

En conclusion, la convexité des boules est une condition nécessaire pour avoir une norme, mais pas une condition suffisante ; en fait, si on ne peut pas prouver d'abord l'homogénéité, alors on ne peut rien dire. Ceci est particulièrement vrai dans $\mathbb{Z}^n$, où les propriétés de cette section peuvent être retranscrites (voir [Dau00, chap. 3] pour les fonctions convexes discrètes).

2.4 Géométrie discrète

La géométrie discrète trouve son origine dans les préoccupations d'affichage de l'infographie [Fol95], et de représentation du continu par des modèles discrets [And00]. Les travaux de ce domaine jeune de 40 ans portent sur des questions topologiques, algorithmiques et analytiques. Nous introduisons dans cette section quelques notions de base ; l'espace discret est défini au §2.4.1, les voisinages et leur combinatoire au §2.4.2 et la connexité au §2.4.3.

2.4.1 Espace discret et primitives d'une image

On appelle *espace discret* un espace dénombrable, par opposition à un espace analogique continu. Une *image discrète* est un ensemble de points (d'une partie bornée de l'espace discret considéré) associés à un ensemble de valeurs (provenant par exemple de l'échantillonnage d'un signal ou d'un calcul). Une image discrète est caractérisée par un *maillage*, un *pavage* et un *codage*. Le maillage est l'arrangement des points entre eux ; le pavage est la forme des points (dual du maillage) ; le codage est le type de valeurs associées aux points (indépendamment du maillage). Une étude des pavages et maillages est présentée dans [Cha91, chap. 1]. Le seul pavage régulier qui existe dans toutes les dimensions est le pavage cubique [Cox74].

Dans tout le document nous utilisons $\mathbb{Z}^n$ pour espace discret, et la grille rectiligne de $\mathbb{Z}^n$ pour maillage. Un point de $\mathbb{Z}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$) est appelé un point *discret* (resp *euclidien*, *rationnel*).

Une image I est stockée sous la forme d'un tableau n-dimensionnel de taille $(L_1{+}1)\times\cdots\times(L_n{+}1)$. Chaque point de l'image est caractérisé par ses coordonnées $x_1, ..., x_n$ dans le tableau (avec $0 \leqslant x_i \leqslant L_i, \forall\, i$) et accédé par $I[x_1, ..., x_n]$. Du point de vue algébrique, une image de dimension 1, 2 ou n est représentée par un vecteur, une matrice ou un tenseur d'ordre n.

L'élément d'image associé à un point discret p en dimension n est appelé un *voxel* ; c'est par définition la région de Voronoï de p, c'est-à-dire l'ensemble des points euclidiens plus proches de p que de tous les autres points discrets. On dit aussi *pixel* en 2D et *hyxel* en 4D. Le voxel associé à p dans la grille rectiligne est le n-cube $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ centré en p. Les 0-, 1- et 2-faces du voxel sont encore appelés *pointel*, *lignel* et *surfel* [Fra96].

2.4.2 Voisins et combinatoire

Deux points discrets sont dit *voisins* si leurs voxels partagent un sommet, une arête, etc. On distingue plusieurs types de voisins, dont le nom est traditionnellement formé à partir du nombre de voisins possibles de ce type. Il en va ainsi des 4- et 8-voisins en 2D et des 6-, 18- et 26-voisins en 3D. Mais cette dénomination manque de généralité et c'est pourquoi, nous adoptons la définition multidimensionnelle d'Andrès [And00, chap. 2] : soit $p, q \in \mathbb{Z}^n$, on dit que p et q sont *k-voisins* ($0 \leqslant k \leqslant n$) si $|p_i - q_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et si $k \leqslant n - \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$. De manière équivalente en termes de distance, p et q sont k-voisins si $d_\infty(p, q) = 1$ et $k \leqslant n - d_1(p, q)$. Enfin en termes de polytopes, les voxels de p et q sont k-voisins s'ils partagent au moins une k-face. Le point important dans ces définitions est qu'un k-voisin est aussi k'-voisin pour tout $k' < k$. On dit qu'un k-voisin est *direct* si $k = n-1$ et *indirect* si $k < n-1$. Lorsque $k = n$ cela signifie que les deux points sont confondus. Le *k-voisinage* d'un point $p \in \mathbb{Z}^n$ est noté $V_k^n(p)$; c'est l'ensemble des points $q \in \mathbb{Z}^n$ qui sont k-voisins de p. Dire que p et q sont k-voisins est équivalent à $q \in V_k^n(p)$, ou encore à $p \in V_k^n(q)$.

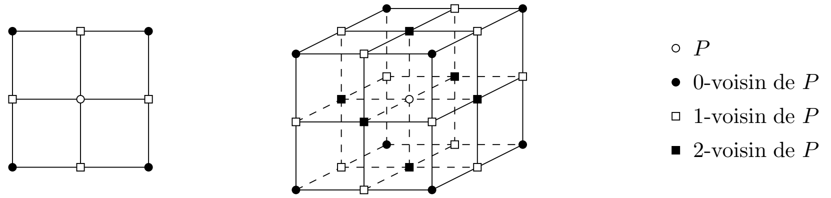


FIG. 2.4 – *Voisinages en dimension 2 et 3.*

Soit $N_k^n = \#\big(V_k^n(p) \setminus \{p\}\big)$ le nombre de k-voisins ($0 \leqslant k < n$) autour de p. Les valeurs des différents termes N_k^n (8, 4, 26, 18, 6, etc, voir figure 2.5.b) permettent de retrouver l'appellation classique, un k-voisin correspondant à un « N_k^n-voisin ». Le nombre N_k^n est la somme des nombres U_k^n de k-faces propres d'un n-cube, plus précisément $N_k^n = \sum_{i=k}^{n-1} U_k^n$. Dans la figure 2.5.a on observe des propriétés liées au n-cube : le nombre de 0-faces (les sommets) est $U_0^n = 2^n$, le nombre de $(n-1)$-faces (les facettes) est $U_{n-1}^n = 2n$, le nombre de n-faces est $U_n^n = 1$, le nombre total de faces est $\sum_{k=0}^{n} U_k^n = 3^n$. On peut facilement calculer les termes du rang n à partir du rang précédent, avec la formule du triangle $U_k^n = U_{k-1}^{n-1} + 2\,U_k^{n-1}$ illustrée figure 2.5.a. On peut aussi utiliser la formule directe $U_k^n = \binom{n}{k}\,2^{n-k}$ donnée dans [Ber90, §12.1.11.2]. Par ailleurs, un n-cube est un polytope simple, donc le théorème 2.5 s'applique aux termes U_k^n ; par exemple, les termes pour $n = 4$ dans la figure 2.5.a vérifient les relations (2.37).

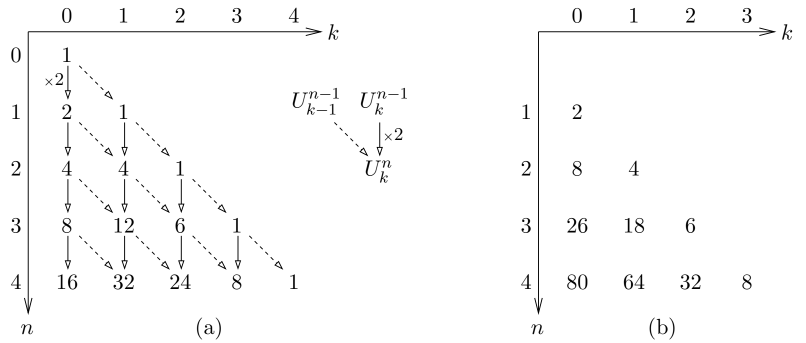


FIG. 2.5 – *Triangle du nombre de voisins : (a) formule du triangle* $U_k^n = U_{k-1}^{n-1} + 2\,U_k^{n-1}$ *pour le nombre* U_k^n *de k-faces du n-cube ; (b) nombre de k-voisins* $N_k^n = U_k^n + \cdots + U_{n-1}^n$.

2.4.3 Connexité

Un ensemble X de points discrets dans une image est appelé un *objet* discret. L'ensemble des points de l'image qui n'appartiennent pas à l'objet est appelé le *complémentaire* de X ou encore le *fond*, noté $\overline{X}$. Un *k-chemin* dans un objet discret A est une suite de points de A telle que deux points consécutifs de la suite sont k-voisins. Un *k-arc* est un k-chemin dont chaque point a exactement deux k-voisins, sauf les extrémités qui n'en ont qu'un. Une *k-courbe* est un k-chemin fermé, c'est-à-dire dont les extrémités sont confondues. Une *k-courbe simple* est un arc fermé. Deux points sont *k-connectés* dans A s'il existe un k-chemin dans A les reliant. Un objet discret A est *k-connexe* si deux points quelconques de A sont k-connectés. Une *k-composante* est un ensemble maximal k-connexe.

Le *théorème de Jordan* dans $\mathbb{R}^2$ dit que toute courbe fermée simple (c'est-à-dire ne se recoupant pas elle-même) sépare le plan en deux domaines (l'intérieur et l'extérieur de la courbe). La traduction dans $\mathbb{Z}^2$ en *théorème de Jordan discret* conduit à un paradoxe topologique [Ros75]. La solution consiste à considérer une connexité $\overline{k}$ pour le fond qui soit compatible avec la connexité k de l'objet [Kon89]. Le même paradoxe existe dans les dimensions supérieures. Les connexités compatibles dans $\mathbb{Z}^2$ sont $(k,\overline{k}) \in \big\{(0,1),\,(1,0)\big\}$ et dans $\mathbb{Z}^3$ sont $(k,\overline{k}) \in \big\{(0,2),\,(2,0),\,(1,2),\,(2,1)\big\}$. À notre connaissance, elles n'ont pas été établies en dimension $n \geqslant 4$. Une possibilité préconisée dans [Jon00] est de prendre $(k,\overline{k}) = (0, n-1)$.

Le *contour* d'un objet discret k-connexe est l'ensemble des points objet qui sont $\overline{k}$-voisins du fond. Le contour est k-connexe. En général, le contour d'un objet n'est pas une courbe simple (certains points du contour peuvent avoir plus de deux voisins). Les points de l'objet qui ne sont pas du contour sont dits *intérieurs* à l'objet. L'image des *contours successifs* d'un objet est une image où l'on marque les points du contour de l'objet à 1, les points du contour de l'intérieur de l'objet à 2, etc, en itérant jusqu'à l'ensemble vide. Le résultat obtenu, qui dépend de k et $\overline{k}$, est une image de distance ; on en reparlera au chapitre 3.

De nombreux travaux sont effectués pour établir des nombres topologiques, caractérisant des configurations de points dans un voisinage. En dimension 2, des nombres de connexité donnent en un point p le nombre de composantes connexes en tournant autour de p [Rut66] [Yok75]. En dimension 3, des nombres de composantes connexes dans des voisinages géodésiques sont proposés dans [Ber94b]. Ces nombres permettent de caractériser des points simples, i.e. qui peuvent être supprimés d'un objet sans altérer sa connexité, utiles pour le calcul de squelettes ou des déformations de chemins.

2.5 Géométrie des nombres

La géométrie des nombres est une branche de la théorie des nombres, initiée par les travaux de Minkowski [Min96] à partir de la fin du 19$^{\text{e}}$ siècle, qui s'attache à étudier des problèmes arithmétiques sous un aspect géométrique. Nous rappelons la définition d'un réseau au §2.5.1, puis nous introduisons la notion de générateur dans la grille rectiligne au §2.5.2. Les points visibles et les suites de Farey seront étudiés au §5.1.

2.5.1 Réseaux

Un sous-ensemble L de $\mathbb{Z}^n$ est appelé un *réseau* (ou *réseau ponctuel*) si L est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}^n$. Plus généralement, un sous-ensemble L de $\mathbb{R}^n$ est un réseau si L est un sous-groupe additif discret de $\mathbb{R}^n$. Un sous-groupe L de $\mathbb{R}^n$ est *discret* si ses points sont *isolés*, i.e. s'il existe une boule de rayon $\beta > 0$ centrée sur chaque point de L qui ne contient aucun autre point de L [Dez97, §13.2]. On représente figure 2.6 un exemple de réseau.

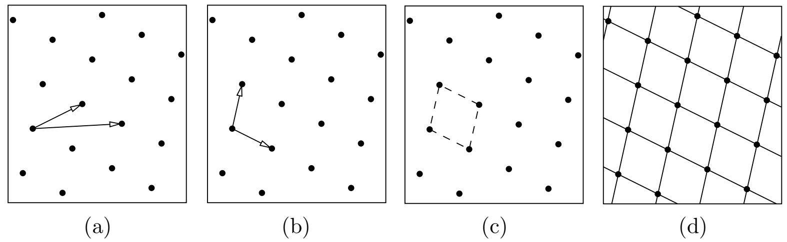


FIG. 2.6 – *Réseau L avec (a) une base* B_1*, (b) une autre base* B_2*, (c) le parallélotope fondamental de* (L, B_2)*, (d) le treillis de* (L, B_2)*.*

Un sous-ensemble $V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ d'un réseau L est une *base* de L si $\forall\,\vec{v} \in L$, il existe un système unique d'entiers $b_1, ..., b_m$ tels que $v = b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_m\vec{v}_m$; si le système n'est pas unique, on dit que V *engendre* L. Tout réseau possède une base, et toutes les bases d'un réseau ont le même cardinal, appelé la *dimension* du réseau.

Soit $L \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau de dimension n, et V un sous-ensemble de n vecteurs de L. On note M_V la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs de V. Le déterminant $\det(M_V)$ est le volume signé du n-parallélotope orienté défini par les vecteurs de V dans $\mathbb{R}^n$ (appelé le *parallélotope fondamental* de (L, V) dans [Mar96, §1.1]). Il est clair que V est une base de L si et seulement si $\det(M_V) \neq 0$.

Soit B_1 et B_2 deux bases d'un réseau $L \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension n, alors

$$M_{B_1} = A \cdot M_{B_2} \tag{2.43}$$

où A est une matrice d'entiers, dont le déterminant est tel que $\det(A) = \pm 1$. On en déduit que la quantité $|\det(B)|$ ne dépend pas du choix de la base dans L ; on l'appelle *déterminant* de L et on la note $\det(L)$. Soit L_1 et L_2 deux réseaux de $\mathbb{R}^n$, B_1 une base de L_1 et B_2 une base de L_2. On dit que L_1 et L_2 sont *équivalents* s'il existe une matrice A de déterminant ± 1 réalisant le changement de base (2.43).

On appelle *réseau fondamental* de $\mathbb{Z}^n$ et on note Λ, l'ensemble $\mathbb{Z}^n$ muni de sa base canonique (matrice identité I et déterminant 1). Une matrice (ou un réseau) dont le déterminant est ± 1 est dite *unimodulaire*. Les matrices de $\mathbb{Z}^n$ de déterminant 1 forment le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Toute matrice unimodulaire d'entiers A est une base de Λ, car $\det(A) \neq 0$ et on peut écrire $A = A\,.\,I$ dans (2.43). Donc tous les réseaux unimodulaires de $\mathbb{Z}^n$ sont équivalents à Λ et réciproquement.

Le théorème fondamental de Minkowski s'applique à des réseaux de déterminant quelconque :

Théorème 2.6 (Minkowski) *Soit $L \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau de dimension n, et P un convexe symétrique par rapport à O, de volume noté* $\mathrm{vol}(P)$. *Si* $\mathrm{vol}(P) > 2^n \det(L)$, *alors P contient un point de L différent de O* [Har78, §24.1] [Old00, §5.4].

Étant donné un réseau L et une base B de L, on appelle *treillis* (ou *réseau de lignes*) la grille T portée par L et les vecteurs de B, c'est-à-dire l'ensemble des droites

$$T = \left\{ (p + \lambda\vec{v}) \,:\, p \in L,\, \vec{v} \in B,\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.44}$$

L'ensemble des points d'intersection des lignes de la grille est le réseau L lui-même. Le treillis engendré par le réseau fondamental Λ est la grille rectiligne. En anglais, « lattice » correspond indifféremment à réseau ou treillis ; la distinction est faite avec « point-lattice » pour un réseau et « line-lattice » pour un treillis. On peut également considérer un treillis comme un type de graphe sur le réseau, ou encore comme le maillage d'un réseau à partir des directions de la base.

Pour compléter cette courte introduction aux réseaux, nous mentionnons quelques points importants dans la littérature. Un problème classique est la réduction de réseau, qui consiste à transformer une base quelconque d'un réseau en diminuant la taille des vecteurs de la base. L'algorithme polynomial LLL publié dans [Len82] a été beaucoup décliné, avec des applications dans les problèmes de sac à dos, de dessins d'enfant et en cryptographie [Jou93]. Des recherches importantes sont également menées sur la classification des réseaux [Mar96] avec des applications en cristallographie, sur les densités d'empilements de sphères (uk: sphere packing, voir [Con88] [Old00]), et leur utilisation dans les codes correcteurs [Tho83] [Pap95].

2.5.2 Symétries et générateur

La grille rectiligne présente un certain nombre de symétries, qui sont de type axial ou diagonal. On note $\mathcal{S}_G(n)$ le groupe (muni de la loi de composition) des symétries de la grille, appelées *G-symétries*, en dimension n. Soit $\mathcal{S}_A(n)$ et $\mathcal{S}_D(n)$ respectivement, les sous-groupes des symétries axiales et diagonales de $\mathcal{S}_G(n)$. Le symétrique axial d'un point $(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ par rapport à l'hyperplan $x_i = 0$ est $(x_1, ..., -x_i, ..., x_n)$; le symétrique diagonal de $(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$ par rapport à l'hyperplan $x_i = x_j$ est $(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$. Le cardinal des groupes est $\#\mathcal{S}_A(n) = 2^n$ (nombre de combinaisons de signes) et $\#\mathcal{S}_D(n) = n!$ (nombre de permutations de coordonnées), d'où $\#\mathcal{S}_G(n) = 2^n n!$ (ce qui fait 8, 48 et 384 pour $n = 2$, 3 et 4).

Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un ensemble $X \subset E^n$ est *G-symétrique* si

$$\forall\, \sigma \in \mathcal{S}_G(n)\,, \quad \sigma(X) = X \tag{2.45}$$

(on dit encore 8- ou 48-symétrique pour $n = 2$ ou 3). On peut alors découper X en $\#\mathcal{S}_G(n)$ sous-ensembles, chacun d'entre-eux permettant de reconstruire X par les G-symétries ; l'un d'eux, choisi arbitrairement, est appelé le *générateur* de X, noté $\mathrm{G}(X)$. Le générateur de E^n est le cône

$$\mathrm{G}(E^n) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in E^n \,:\, 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1 \right\} \tag{2.46}$$

(encore noté $\frac{1}{8}E^2$ ou $\frac{1}{48}E^3$ pour $n = 2$ ou 3 dans [Thi02]). Dans la figure 2.7 on représente $\mathrm{G}(E^n)$ pour $n = 2$, 3 et 4 en projection ; ce type de représentation d'un objet de dimension n est communément appelé *diagramme de Schlegel* [Gru67, §3.3] [Zie95, §5.2]. Le générateur de X est $\mathrm{G}(X) = X \cap \mathrm{G}(E^n)$. Avec la notation E_k introduite au §2.1 on a par ailleurs

$$\mathrm{G}(E^n_k) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in E^n \,:\, 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1 \leqslant k \right\}. \tag{2.47}$$

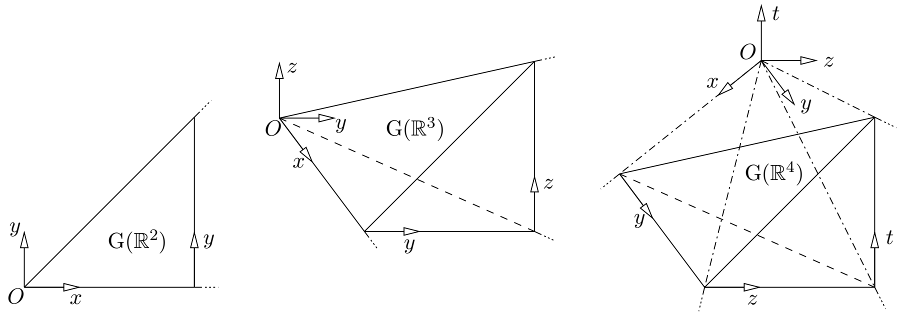


FIG. 2.7 – *Le générateur de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 2$, 3 et 4 en projection.*

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les notions utiles pour aborder les distances de chanfrein d'un point de vue théorique en dimension finie. Nous avons d'abord défini au §2.2 une distance et une boule, puis une norme dans un module. L'emploi d'un module permet non seulement de généraliser un espace vectoriel dans un espace discret, mais encore de définir dans un cadre cohérent l'homogénéité, les barycentres et combinaisons convexes, et plus tard les chemins dans les distances de chanfrein.

Au §2.3 nous avons défini la convexité dans l'espace euclidien et l'espace discret. Nous avons rappelé des propriétés des polytopes, qui seront utiles quand nous parlerons des sphères de chanfrein. Enfin nous avons analysé les liens entre la convexité et les boules de normes, au moyen des fonctions convexes et des jauges. Ce point est important dans nos travaux car il remet en cause la démarche que nous avions utilisée dans [Thi94d, §3.4 et §3.5.1].

Les notions de base en géométrie discrète sont rappelées au §2.4. Nous avons opté pour des définitions multidimensionnelles, plus proches du vocabulaire des polytopes. Enfin dans le §2.5 nous avons défini un réseau, et la notion de générateur sur la grille rectiligne.

Chapitre 3

Transformations de distances

Le concept de transformation de distance a été proposé par Blum en 1964 pour une image binaire dans le plan euclidien [Blu67] ; puis Rosenfeld et Pfaltz ont introduit l'idée dans le plan discret dans [Ros66]. Par la suite, de nombreuses études ont été faites pour approcher la distance euclidienne avec des distances discrètes. Ce chapitre présente un état de l'art sur les principales distances utilisées en analyse d'image. Nous commençons par rappeler le principe des transformations de distances au §3.1, puis nous passons en revue des familles de distances au §3.2. Nous abordons les distances de chanfrein plus en détail au §3.3.

3.1 Principe

3.1.1 Images de distance

On définit les images de distance de manière générale, à la fois pour les images discrètes et analogiques. D'un point de vue informatique, seules les images discrètes de distance sont calculables et mémorisables, tandis que les images analogiques de distance trouvent leur utilité dans la suite pour analyser certaines propriétés.

Définition 3.1 (Image de distance) *Étant donné un compact X dans un espace métrique (E, F, d), on appelle image (ou carte) de distance, l'image notée DM_X (pour* Distance Map*) telle que la valeur attribuée en tout point p est égale à la distance de p au complémentaire de X :*

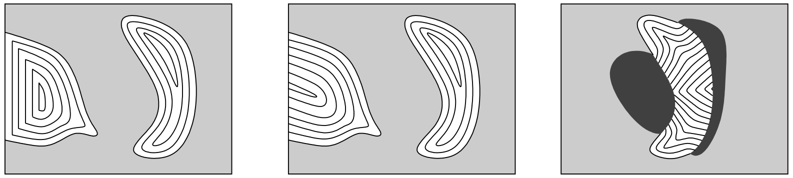
$$DM_X \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ p & \longmapsto & d(p, \overline{X}) = \inf\{\, d(p,q) \,:\, q \in \overline{X} \,\}\,. \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

En général, l'ensemble X est mémorisé dans une image binaire I. L'image de distance est alors une copie J de I, dans laquelle les points sont étiquetés à leur distance à $\overline{X}$. Par définition, tous les points de $\overline{X}$ sont laissés à 0 dans J. Pour éviter un problème sur les points du bord de I, on peut soit supposer qu'aucun point de X n'est sur le bord, soit doter I d'un bord extérieur, dans lequel tous les points sont mis à 0.

On appelle *image à bord infini* une image dotée d'un bord extérieur où tous les points sont initialisés à $+\infty$ (en pratique à une constante de F suffisamment grande). Avec une telle image, les points de X ne reçoivent pas d'information de distance des points du bord extérieur lors du calcul de l'image de distance. Une telle image permet de simuler un ensemble X de taille infinie, ou du moins dépassant largement I, sans modifier les algorithmes de calcul. Elle permet aussi de calculer une boule de distance, en initialisant le centre à 0 et les autres points à 1, puis en seuillant DM sur le rayon de la boule (l'image doit être de taille suffisante).

Une *image contrainte* est une image I à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, où les ensembles de 0 et de 1 représentent X et $\overline{X}$, et l'ensemble $\underline{X}$ des -1 représente des obstacles. La *distance géodésique* entre deux points p et q de $I \setminus \underline{X}$ est la distance du plus court chemin de p à q ne passant pas par les obstacles. On appelle *image de distance contrainte* une copie J de I, dans laquelle les points sont étiquetés à leur distance géodésique à $\overline{X}$ (les points de $\underline{X}$ ne sont pas modifiés). Le calcul de telles images nécessite une adaptation des algorithmes.

Un *intervalle de niveau* est l'ensemble des points d'une image de distance qui ont une valeur dans un intervalle donné. Par abus de langage on utilise le terme de *courbe de niveaux*. Nous schématisons des courbes de niveaux pour montrer les différences entre les trois types d'images de distance à la figure 3.1.



(a) (b) (c)

FIG. 3.1 – *Courbes de niveaux sur (a) image de distance, (b) image de distance à bord infini, (c) image de distance contrainte, avec X en blanc, $\overline{X}$ en gris clair et $\underline{X}$ en gris foncé.*

3.1.2 Transformations de distance

L'opération consistant à calculer une image de distance est appelée une *transformation de distance* et notée DT (pour *Distance Map*). Une fonction de distance est souvent définie par une formule directe sur les coordonnées des points ou par des opérations ensemblistes. Pour une DT, il peut être plus intéressant d'exprimer la distance comme le coût d'un *chemin minimal* sur un certain *graphe pondéré*. Ce graphe désigne une famille de chemins et associe un coût à chacun de ses membres.

Un premier algorithme de DT est le calcul exhaustif, qui pour chaque point de l'image, teste tous les autres points pour trouver le minimum. Cette méthode est possible pour toute distance d définie par une formule directe, mais extrêmement coûteuse (en $O(L^{2n})$ pour une image de côté L en dimension n).

L'idée de base pour obtenir une DT efficace est de déterminer *globalement* le minimum des distances au complémentaire, en propageant à partir du contour, des distances locales entre pixels proches. Cette idée de propagation n'est pas sans évoquer le tri à bulle.

Pour faciliter la propagation locale lors de la transformation, on privilégie souvent les distances définies par chemin minimal ; en effet, on peut alors déduire la valeur de distance au fond en chaque point p, à partir des valeurs déjà connues pour chaque voisin, et ceci en prolongeant leur chemin minimal respectif jusqu'à p (algorithme de Dijkstra [Dij59]). Dans ce type d'approche, on peut très bien se passer d'une formulation directe de la fonction de distance.

Il n'existe pas d'algorithme universel qui soit efficace pour toutes les familles de distances, mais des algorithmes spécifiques. On distingue les algorithmes parallèles (itératifs jusqu'à convergence) des algorithmes séquentiels (par balayages). La complexité des DT est mesurée en termes du nombre de passages sur l'image et de la taille du voisinage scruté pour le calcul de chaque point.

Dans une DT parallèle, l'ordre des calculs pendant une itération donnée est arbitraire (les points objet sont initialisés à $+\infty$). On peut considérablement accélérer la convergence en choisissant judicieusement l'ordre des calculs [Mon68]. Une première technique est de procéder par courbes de niveaux, mais le nombre d'itérations dépend alors de l'épaisseur des objets dans l'image (complexité en $O(L^{n+1})$) ; une seconde technique encore plus rapide est de procéder par balayages sur l'image (complexité optimale en $O(L^n)$) ; c'est le cas de figure idéal sur un ordinateur séquentiel, avec un nombre de balayages fixes, indépendant de l'épaisseur des objets dans l'image. Mais de tels schémas ne sont pas possibles pour toutes les distances.

Au §3.2, nous passons en revue les DT existantes pour les distances classiques, puis nous abordons les DT de chanfrein au §3.3. Le but commun à toutes ces DT est d'approximer le plus rapidement possible la distance euclidienne d_E dans une image. Les distances que nous présentons ont des DT plus ou moins simples ou efficaces, approchent d_E à des degrés divers, et possèdent toutes des propriétés particulières. On a donc tout intérêt à conserver cette large palette de distance et de DT pour bien adapter ses choix selon les applications.

3.1.3 Applications

Nous passons en revue les principales applications des transformations de distance en analyse d'image. Un aperçu de certaines d'entre elles est donné dans [Pag92] [Bor94].

Une des premières applications de DT est le calcul de l'axe médian et du squelette pondéré, dont le principe a été donne dans [Blu67] dans l'espace continu, puis dans [Pfa67] [Mon68] dans l'espace discret. Nous avons proposé un algorithme en 2D qui calcule le squelette pondéré pour toute distance de chanfrein à 2 ou 3 pondérations dans [Thi94e] [Thi96]. Nous consacrons le §6 à l'axe médian, qui est un codage réversible de la forme, et permet également un certain nombre d'applications.

Une utilisation classique de DT est la mise en correspondance de formes, avec l'algorithme de « chamfer matching » de [Bar77], adapté à une pyramide de résolution dans [Bor88b].

L'utilisation des DT en morphologie mathématique a été suggérée dans [Ros68], pour réaliser des ouvertures et fermetures avec des boules de distances de manière efficace, puis étudiée dans [Nac94]. Une méthode d'interpolation de régions, basée sur la distance de Hausdorff (cf §2.2.1), est proposée dans [Mey96].

Le calcul du diagramme (ponctuel) de Voronoï est un problème classique de la géométrie algorithmique [Boi95] [Ber94a] ; le calcul du diagramme généralisé est connu pour être très difficile. Le diagramme *discret* ponctuel ou généralisé peut être calculé avec une variante très simple de DT, de façon approchée [Bor86] ou exacte [Ye88] en deux balayages, quelque soit le nombre de germes dans l'image.

Les DT sont employées dans des applications biomédicales, par exemple dans la morphométrie de section de nerfs, ou les trajectoires de caméra en endoscopie virtuelle par distances géodésiques [Cui99a]. On utilise également DT pour les trajectoires de robots par graphe de la ligne médiane [Mon87] et par distances géodésiques [Ver91a]. On mentionne encore la granulométrie [Thi91a] [Mon93], et l'estimation de la conductivité thermique [Lau92]

De nouvelles applications de DT sont apparues récemment. On cite un algorithme de remplissage de trous dans des surfaces discrètes [Akt96], une méthode de lissage dans le rendu de volumes discrets [Muk99], une méthode d'accélération du lancer de rayon dans des volumes discrets [Sra00]. Un algorithme de compression d'image à base de DT sur les images en niveau de gris est comparé avec l'algorithme DCT utilisé dans les images JPEG dans [Toi99].

3.2 Distances classiques

Les alternatives à d_4 et d_8 (§3.2.1) que l'on rencontre le plus souvent en analyse d'images sont les distances octogonales (§3.2.2), la distance euclidienne adaptée au discret (§3.2.3) et les distances de chanfrein (§3.3). D'autres possibilités existent dans la littérature, voir par exemple [Yam84b] [Das90c] [Cha92], mais elles sont plus anecdotiques. Un historique très intéressant des distances discrètes est réalisé dans [Mel91], qui est replacé dans le contexte de la géométrie des distances [Blu70].

3.2.1 Distances de connexité

Les premières distances discrètes sont présentées par Rosenfeld et Pfaltz dans [Ros66, §4]. Ils définissent des distances notées d et d^* à partir de la longueur des chemins minimaux 1-connexes et 0-connexes, respectivement. Il s'agit bien sûr des distances d_4 et d_8 que nous avons vues au §2.2.1. Par la suite, une étude systématique est entreprise dans [Ros68] sur plusieurs distances 2D, dont d_4 et d_8, cette fois à partir de leurs formules directes.

La formule itérative dans une image I en chaque point $(x, y) \in X$ est

$$I[x,y] = \min \left\{ \begin{array}{l} I[x-1,y]+1,\ I[x+1,y]+1, \\ I[x,y-1]+1,\ I[x,y+1]+1 \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

pour une DT avec d_4 ; la formule itérative avec d_8 est

$$I[x,y] = \min \left\{ \begin{array}{l} I[x-1,y]+1,\ I[x+1,y]+1, \\ I[x,y-1]+1,\ I[x,y+1]+1, \\ I[x-1,y-1]+1,\ I[x+1,y-1]+1, \\ I[x-1,y+1]+1,\ I[x+1,y+1]+1 \end{array} \right\}. \tag{3.3}$$

La version séquentielle de (3.2) est constituée d'un *balayage avant*

$$\begin{array}{l} \textbf{for } y = 0 \textbf{ to } m\,,\ \textbf{for } x = 0 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\ \quad I[x,y] = \min \left\{ I[x-1,y]+1,\ I[x,y-1]+1 \right\} \end{array} \tag{3.4}$$

pour une image $(n+1) \times (m+1)$, suivi par un *balayage arrière*

$$\begin{array}{l} \textbf{for } y = m \textbf{ to } 0\,,\ \textbf{for } x = n \textbf{ to } 0 \textbf{ do} \\ \quad I[x,y] = \min \left\{ I[x,y],\ I[x+1,y]+1,\ I[x,y+1]+1 \right\}. \end{array} \tag{3.5}$$

On obtient la version séquentielle de (3.3) de la même manière en rajoutant $I[x-1, y-1]+1$, $I[x+1, y-1]+1$ dans le min de (3.4), et $I[x-1, y+1]+1$, $I[x+1, y+1]+1$ dans (3.5).

Les deux balayages séquentiels (3.4) et (3.5) constituent la DT de Rosenfeld et Pfaltz, publiée et démontrée en 2D pour d_4 et d_8 dans [Ros66]. Plus communément appelée « algorithme de Rosenfeld », cette DT est généralisée par la suite pour les distances de Montanari (voir §3.3.1), puis les distances de chanfrein en dimension quelconque (voir §3.3.2).

			1	1	1			1	1	1	1	1
	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1
1	2	2	3	3	3	2	2	3	3	3	2	1
1	2	3	4	4	4	3	3	4	4	3	2	1
1	2	3	4	5	5	4	4	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	4	4	3	4	4	3	2	1
1	2	3	4	4	3	3	2	3	3	2	1	
1	2	3	3	3	2	2	1	2	2	2	2	1
	1	2	2	2	1	1		1	1	1	2	1
		1	1	1							1	1

(a)

			1	1	1			1	1	1	1	1
	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	1
1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1
1	2	3	3	4	4	4	4	4	3	2	2	1
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	1
1	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	
1	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1
	1	1	2	1	1	1		1	1	1	1	1
		1	1	1							1	1

(b)

FIG. 3.2 – *DM pour (a) d_4 et (b) d_8.*

Dans la figure 3.2 on montre des images de distances calculées avec d_4 et d_8. Par construction, leurs courbes de niveaux sont des 0-courbes pour d_4 et 1-courbes pour d_8. Les DM sont donc également des images de contours successifs (cf §2.4.3) pour ces deux distances.

Borgefors présente les distances de connexité en 3D dans [Bor84, §4]. Ces distances définies par les chemins minimaux 2-, 1- et 0-connexes sont appelées d_6, d_{18} et d_{26}, respectivement.

Les boules de d_4 et d_8 sont un losange et un carré (voir figure 2.1), les boules de d_6, d_{18} et d_{26} sont un octaèdre, un cuboctaèdre et un cube (voir [Bor84, fig. 20]). De par la non-sphéricité des boules, les valeurs de distance obtenues sont sensiblement différentes de celles attendues pour d_E, d'où une anisotropie, et une non-robustesse à la rotation de l'image des traitements fondés sur ces distances.

3.2.2 Distance octogonale

Le concept de *distance octogonale* a été introduit par Rosenfeld et Pfaltz dans [Ros68, §3]. Ils ont montré que l'emploi alterné de d_4 et d_8 pour chaque courbe de niveaux définit une nouvelle distance, notée d_{oct}, telle que $d_4 \geq d_{oct} \geq d_8$ et qui approche mieux d_E. La boule est un octogone, de côtés perpendiculaires aux axes et aux bissectrices. Dans le même article ils ont introduit le concept de distance octogonale généralisée, consistant à alterner d_4 et d_8 dans d'autres proportions, par exemple par cycles (d_4, d_8, d_4) ou (d_4, d_8, d_4, d_8, d_4), ou encore par cycles de m fois d_4 puis n fois d_8. Dans ce dernier cas ils montrent que la proportion idéale pour approximer d_E est obtenue en faisant tendre $2n/m$ vers $\sqrt{2}$.

Das et Chatterji font dans [Das90b] une étude systématique des distances octogonales généralisées en 2D. On appelle *séquence de voisinage* une suite $B = \{b(1), b(2), ..., b(k), ...\}$, qui représente l'ordre dans lequel sont employés d_4 et d_8. La notation choisie est $b(i) = 1$ pour d_4 et $b(i) = 2$ pour d_8 ; de la sorte, $b(i)$ représente le nombre maximal autorisé de changements unitaires de coordonnées entre deux points p_i et p_{i+1} dans un chemin $p_1, ..., p_m$. La distance définie par la longueur du chemin minimal restreint par B est notée d_B. On se limite au cas où B est cyclique, et on note $B = \{b(1), b(2), ..., b(k)\}$ une période de la séquence. Par exemple, on a $d_{\{1\}} = d_4$, $d_{\{2\}} = d_8$ et $d_{\{1,2\}} = d_{oct}$.

Toutes les séquences de voisinages ne définissent pas une distance ; par exemple $d_{\{2,1\}}$ ne respecte pas l'inégalité triangulaire [Das90b, §4]. Das et Chatterji donnent une condition nécessaire et suffisante sur B pour que d_B soit une distance, ainsi que des formules directes, à partir de résultats plus généraux [Das87] [Yam84b]. En particulier, ils montrent la conjecture de [Oka83, p. 210] selon laquelle toute séquence croissante induit une distance. Une séquence cyclique $B = \{b(1), b(2), ..., b(k)\}$ est dite croissante si $b(i) \leqslant b(j)$ pour tout $i < j$. Les séquences croissantes de longueur $\leqslant 3$ sont par ordre lexicographique : $\{1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 2\}$ et $\{2\}$. On compare figure 3.3 les cartes de distance obtenues pour $\{1, 2\}$ et $\{1, 1, 2\}$. D'autres résultats sont fournis dans [Das89] [Das90a] [Das91].

			1	1	1			1	1	1	1	1
	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1
1	2	2	2	3	2	2	2	2	3	3	2	1
1	2	3	3	4	3	3	3	3	4	3	2	1
1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1
1	2	3	4	4	4	3	3	3	3	2	2	1
1	2	3	4	3	3	2	2	2	3	2	1	
1	2	2	3	2	2	2	1	2	2	2	2	1
	1	2	2	2	1	1		1	1	1	2	1
		1	1	1							1	1

(a)

			1	1	1			1	1	1	1	1
	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1
1	2	2	3	3	3	2	2	3	3	3	2	1
1	2	3	3	4	3	3	3	3	4	3	2	1
1	2	3	4	5	4	4	4	4	4	3	2	1
1	2	3	4	4	4	3	3	3	3	3	2	1
1	2	3	4	3	3	3	2	3	3	2	1	
1	2	3	3	3	2	2	1	2	2	2	2	1
	1	2	2	2	1	1		1	1	1	2	1
		1	1	1							1	1

(b)

FIG. 3.3 – *DM pour (a)* $d_{\{1,2\}}$ *et (b)* $d_{\{1,1,2\}}$.

Les distances *hyperoctogonales* sont la généralisation naturelle à la dimension 3 [Oka83]

[Dan93]. Ce sont des cycles composés de d_6, d_{18} et d_{26}, notés 1, 2 et 3 dans une séquence de voisinages B. Les valeurs dans B indiquent encore une fois le nombre maximal de changements unitaires de coordonnées dans un chemin. Danielsson préconise $d_{\{1,1,1,2,3\}}$ pour approximer d_E.

Dans [Muk00], Mukherjee et al. étudient les séquences croissantes en 2D et 3D, rappelant qu'elles induisent toujours une distance. Les séquences croissantes de longueur $\leqslant 3$ en 3D sont dans l'ordre lexicographique : $\{1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 3\}$, $\{2\}$, $\{2, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 3, 3\}$ et $\{3\}$. Dans le même article, les auteurs optimisent les séquences croissantes en minimisant l'erreur par rapport à d_E selon plusieurs critères analytiques, et comparent leurs résultats par rapport aux distances de chanfrein. Ils concluent que leurs meilleures distances octogonales font aussi bien que les distances de chanfrein pour un masque de taille 3 en 2D et 3D, mais oublient de les comparer avec les distances de chanfrein pour un masque de taille supérieure, qui donnent de bien meilleurs résultats.

Plusieurs DT séquentielles ont été proposées en 2D : une DT en 4 passes dans [Tor81], une DT en 2 super-passes avec moins d'opérations dans [Dan80]. Pour le 3D, des algorithmes sont fournis dans [Oka83] et [Bor84].

Selon Danielsson, les distances octogonales présentent un intérêt pour les opérations morphologiques sur les images binaires, et permettent d'approximer correctement la distance euclidienne [Dan93]. De plus elles sont employées dans un nombre appréciable d'applications [Muk00]. Mais quelle que soit la séquence de voisinage utilisée, les boules sont au mieux des octogones en 2D et des polyèdres à 26 facettes en 3D. Le nombre de facettes est borné, ce qui limite forcément l'approximation de la sphère euclidienne, alors que les sphères de chanfrein peuvent avoir autant de facettes que l'on veut, avec une DT plus efficace et plus simple.

3.2.3 Distance euclidienne

La distance euclidienne d_E n'est évidemment pas discrète. Si l'on veut rester dans le domaine discret, on peut considérer par exemple les fonctions d_E^2, round(d_E), $\lfloor d_E \rfloor$ ou $\lceil d_E \rceil$. Malheureusement, d_E^2 n'est pas une distance (cf §2.2.1), et les fonctions round(d_E) et $\lfloor d_E \rfloor$ non plus [Ros68, p. 46]. La cause est le non-respect de l'inégalité triangulaire, en particulier pour les petites valeurs. En revanche, il est intéressant de noter que $\lceil d_E \rceil$ est bien une distance [Rho92] ; toutefois $\lceil d_E \rceil$ n'est pas une norme, car $\lceil d_E \rceil((0, 0), (1, 1)) = \lceil \sqrt{2} \rceil = 2$ et $\lceil d_E \rceil((0, 0), (2, 2)) = \lceil 2\sqrt{2} \rceil = 3$.

Pour mémoriser une DM calculée avec d_E on est contraint de changer de système de représentation, soit en stockant les valeurs de d_E dans une image de réels, soit en utilisant deux images d'entiers pour les coordonnées du point du fond le plus proche (en valeurs signées ou absolues), soit encore en mémorisant d_E^2 dans une image d'entiers longs. La figure 3.4 montre un exemple de couple d'images de coordonnées (non signées), et la figure 3.5 montre l'image correspondante avec d_E^2.

			1	0	0			1	0	0	0	0
	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	2	1	0	0	1	2	0	2	1
1	2	2	1	2	1	0	0	1	2	3	2	1
1	2	3	4	2	1	0	0	1	3	2	2	1
1	2	3	4	1	2	1	0	1	3	2	1	0
1	2	2	3	1	2	1	0	1	2	2	1	
1	1	2	2	1	0	1	0	1	0	0	1	0
	1	1	0	1	0	0		1	0	0	1	1
		1	0	0							1	0

(a)

			0	1	1			0	1	1	1	1
	0	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	0	0
0	0	2	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0
0	0	0	0	4	4	4	4	4	2	2	0	0
0	0	0	0	4	3	3	3	3	1	1	1	1
0	0	2	2	3	2	2	2	2	2	0	0	
0	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1
	0	1	2	1	1	1		0	1	1	1	0
		0	1	1							0	1

(b)

FIG. 3.4 – *DM pour (a)* $d_E : x$ *et (b)* $d_E : y$ *non signées.*

			1	1	1			1	1	1	1	1
	1	1	2	4	2	1	1	2	4	4	4	1
1	2	4	5	8	5	4	4	5	8	9	4	1
1	4	8	10	13	10	9	9	10	13	9	4	1
1	4	9	16	20	17	16	16	17	13	8	4	1
1	4	9	16	17	13	10	9	10	10	5	2	1
1	4	8	13	10	8	5	4	5	8	4	1	
1	2	5	8	5	4	2	1	2	4	4	2	1
	1	2	4	2	1	1		1	1	1	2	1
		1	1	1							1	1

FIG. 3.5 – *DM pour* d_E^2.

La transformation de distance euclidienne (EDT) est née dans les années 1980. Imparfaite, elle a suscité quantité de travaux pour l'améliorer ou pour élaborer d'autres stratégies. L'opération est rendue difficile par le fait que d_E n'est pas calculable *localement* sur une DM. Une analyse bibliographique très complète des différents algorithmes successivement proposés et de leur complexité est effectuée dans [Cui99a].

La première méthode est l'algorithme SED (S pour *sequential*) de Danielsson [Dan80], qui opère en 4 passages séquentiels sur l'image, mais produit des erreurs dans certaines configurations et n'est pas très rapide. Une version modifiée par Ye [Ye88] permet le calcul de l'image signée. Ragnemalm propose une version de SED avec 3 passes en 2D et 4 passes en 3D dans [Rag93a] [Rag93b]. Leymarie montre dans [Ley92] que SED devient, avec quelques changements mineurs, aussi efficace que la DT des distances de chanfrein (§3.3). Mullikin propose dans [Mul92] un post-traitement de SED pour corriger les erreurs, de même que Cuisenaire dans [Cui99b].

De son côté Yamada [Yam84a] a donné un algorithme parallèle, qui dépend donc de l'épaisseur des objets dans l'image et est assez lent sur machine séquentielle. Le résultat est quasi-exact avec de rares erreurs selon [For89]. Des algorithmes parallèles utilisant des opérateurs de la morphologie mathématique en niveaux de gris sont proposés pour d_E [Shi92] et d_E^2 [Hua94]. D'autres algorithmes parallèles sont trouvés dans [Emb96] [Egg97] [Lee97].

À titre de curiosité, Forchhammer [For89] présente un calcul en 2D de l'image euclidienne à partir d'une image de chanfrein avec une table de correspondance, qui ne fonctionne que pour des petites valeurs (inférieures à $\sqrt{17}$ en utilisant $d_{\langle 3,4\rangle}$ et $\sqrt{104}$ pour $d_{\langle 19,27,42\rangle}$).

Une autre méthode efficace consiste à faire évoluer une chaîne du contour vers l'intérieur des objets [Vin91] [Rag92] [Egg98] ; le résultat est exact, mais requiert une importante structure de données. Une nouvelle classe d'EDT utilisant le diagramme de Voronoï est proposée dans [Bre95] et [Cui99c], mais encore une fois avec des structures de données conséquentes.

Saito et Toriwaki proposent dans [Sai94] un algorithme efficace qui calcule directement d_E^2 en toute dimension en exploitant le théorème de Pythagore. Leur DT (que nous notons PDT, pour Pythagore) est simple à implémenter, avec un aller-retour sur chaque ligne puis sur chaque colonne. En 3D, il suffit de rajouter un aller-retour sur chaque rangée en z (et de même pour chaque dimension supérieure). Le temps de calcul varie selon l'épaisseur des objets, avec une complexité en $O(n.L^{n+1})$ pour une image de côté L en dimension n. PDT est une version spécialisée de l'algorithme multi-distance de Paglieroni dans [Pag92].

Un comparatif de ces nombreuses EDT dans [Cui99a] permet de voir que l'algorithme PDT de Saito et Toriwaki est un excellent choix si l'on veut un résultat exact. En 2D, quelques algorithmes plus récents ont une meilleure complexité théorique, mais sont délicats à implémenter, et sont pénalisés par la gestion de structures de données lourdes, qui les ramènent expérimentalement au niveau de PDT. En 3D, PDT est imbattable pour les objets d'épaisseur faible. Une solution hybride est proposée en 3D dans [Cui99a], avec l'emploi de son algorithme PSN en 2D

[Cui99c] sur chaque coupe du volume, puis l'aller-retour de PDT sur chaque rangée en z. Cette méthode hybride est plus rentable que PDT à partir d'une épaisseur de 250 voxels.

En conclusion, l'emploi de d_E ou de d_E^2 peut se justifier en analyse d'images lorsque l'isotropie des propriétés et la fiabilité des mesures sont prépondérantes ; ceci explique le volume de travaux autour de la distance euclidienne. Mais son emploi présente un certain nombre de désagréments : l'absence de définition locale, le changement de représentation, les EDT beaucoup plus complexes que la DT de chanfrein et généralement moins efficaces. Le principal inconvénient est le coût extrême de la détection de l'axe médian sur une EDM, que nous verrons au chapitre 6. Enfin, il n'y a pas à notre connaissance de EDT inverse (cf §3.3.3) sur l'axe médian.

3.3 Distances de chanfrein

3.3.1 Distances de Montanari

Montanari propose dans [Mon68] une famille de distances 2D à valeurs réelles, qui sont les véritables précurseurs des distances de chanfrein. Ses distances reposent sur les points visibles et les suites de Farey, auquels nous consacrons le §5.1.

On appelle *point visible* de $\mathbb{Z}^2$ un point (x, y) tel que $\mathrm{pgcd}(x, y) = 1$. Un *masque* de Montanari M_n $(n > 0)$ est le sous-ensemble des points visibles de $[-n, n]^2$. On rajoute à cette définition le masque M_0 du 1-voisinage.

Deux points p et q sont dits M_n*-adjacents* si $(x_q - x_p, y_q - y_p) \in M_n$. Le M_n*-voisinage* d'un point p est l'ensemble des points q qui sont M_n-adjacents à p. On représente figure 3.6 les voisinages correspondant aux premiers masques de Montanari. La *longueur* des arêtes entre tout couple p et q de points M_n-adjacents est fixée à $d_E(p, q)$.

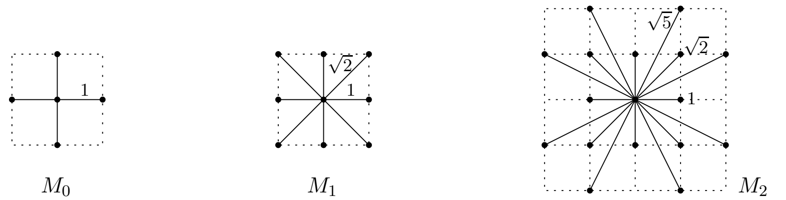


FIG. 3.6 – *Voisinages de Montanari pour les masques* M_0, M_1 *et* M_2 *et longueur des arêtes.*

Un M_n*-chemin* est une suite de points telle que deux points consécutifs de la suite sont M_n-adjacents. La famille de tous les M_n-chemins possibles dans une image est un graphe, tel que les sommets sont les points de l'image, et les arêtes relient chaque sommet aux points M_n-adjacents. Un tel graphe, dont le M_n-voisinage constitue la cellule de base, est appelé le *graphe d'adjacence* pour M_n (ou encore « reticular network » par Montanari), voir figure 3.7. Le *coût* d'un chemin est la somme des longueurs des arêtes du chemin. La distance de Montanari d_{M_n} entre deux points p et q est le coût du chemin de coût minimal de p à q dans la famille des M_n-chemins. En termes de théorie des graphes, d_{M_n} est la distance *intrinsèque* du graphe d'adjacence.

Montanari montre que pour tout point $P \in \mathbb{Z}^2$, il existe un chemin minimal de O à P utilisant au maximum deux types d'arêtes de M_n [Mon68, §5]. On considère les cônes centrés en O, formés par les paires consécutives d'arêtes de M_n. Cas (a) : si P est sur une droite frontière OI $(I \in M_n)$, alors le chemin minimal est uniquement constitué d'arêtes OI. Cas (b) : si P est dans un cône OIJ $(I, J \in M_n)$, alors le chemin minimal est uniquement constitué d'arêtes OI et OJ.

Montanari en déduit les formules directes de la longueur des chemins minimaux, en exploitant les suites de Farey constituées par les pentes $t_i = \frac{y_i}{x_i}$ des points de M_n [Mon68, thm. 1]. Nous avons retranscrit ces formules en termes de coordonnées dans [Thi94d, p. 34]. Soit $P = (x, y) \in$

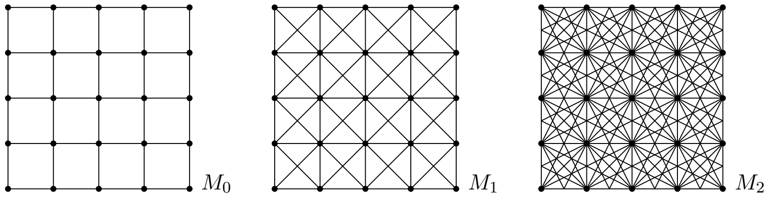


FIG. 3.7 – *Graphe d'adjacence de Montanari pour les masques M_0, M_1 et M_2.*

$\mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Cas (a) : si $\mathrm{pgcd}(x, y) \neq 1$ alors soit $I = (x_i, y_i) = \mathrm{irred}(x, y)$ le point de M_n dont P est une période ; on a de façon évidente

$$d_{M_n}(O, P) = \mathrm{pgcd}(x, y)\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\,. \tag{3.6}$$

Cas (b) : si $\mathrm{pgcd}(x, y) = 1$, on cherche les points $I = (x_i, y_i)$ et $J = (x_j, y_j)$ de M_n qui définissent le cône dans lequel figure P. En supposant à une G-symétrie prêt que $\frac{y_i}{x_i} < \frac{y}{x} < \frac{y_j}{x_j}$, on a

$$d_{M_n}(O, P) = \begin{vmatrix} x & x_j \\ y & y_j \end{vmatrix} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \begin{vmatrix} x_i & x \\ y_i & y \end{vmatrix} \sqrt{x_j^2 + y_j^2}\,. \tag{3.7}$$

Montanari montre que d_{M_n} est toujours une distance [Mon68, thm. 1]. Nous verrons dans la suite que d_{M_n} induit toujours une norme sur le module $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La formule itérative d'une DT avec d_{M_n} en chaque point $(x, y) \in X$ dans une image I est

$$I[x, y] = \min \left\{ I[x + u, y + v] + \sqrt{u^2 + v^2} \;:\; (u, v) \in M_n \right\}. \tag{3.8}$$

Montanari démontre dans [Mon68, thm. 2] que la convergence de (3.8) peut être obtenue de façon extrêmement efficace en seulement deux balayages séquentiels sur l'image, chacun n'utilisant qu'un demi-masque. Étant donné un entier n, on considère le demi-plan $D = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y < \frac{-1}{\alpha} x \}$ où α est un entier arbitraire tel que $\alpha > n$. Le demi-masque *avant* est défini par $F_n = M_n \cap D$, et le demi-masque *arrière* par $B_n = (M_n \cap -D) \cup \{O\}$ (voir figure 3.8). La DT séquentielle de Montanari dans une image $(n + 1) \times (m + 1)$ est constituée du *balayage avant*

$$\begin{aligned} &\textbf{for } y = 0 \textbf{ to } m\,, \textbf{ for } x = 0 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\ &\qquad I[x, y] = \min \left\{ I[x + u, y + v] + \sqrt{u^2 + v^2} \;:\; (u, v) \in F_n \right\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

suivi par le *balayage arrière*

$$\begin{aligned} &\textbf{for } y = m \textbf{ to } 0\,, \textbf{ for } x = n \textbf{ to } 0 \textbf{ do} \\ &\qquad I[x, y] = \min \left\{ I[x + u, y + v] + \sqrt{u^2 + v^2} \;:\; (u, v) \in B_n \right\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour le plus petit masque M_0 de Montanari on a $d_{M_0} = d_4$, et on retrouve exactement l'algorithme de Rosenfeld pour d_4 du §3.2.1. Montanari montre aussi comment retrouver un objet à partir de certains points (les points du squelette) en modifiant l'initialisation de son algorithme [Mon68, §8] ; on verra plus loin que cette transformation est une DT inverse (RDT).

Par définition on a $d_{M_n} \geqslant d_E$ pour tout n. En augmentant n, on peut approximer d_E autant que l'on veut. Montanari donne une table de l'erreur relative $\epsilon = \frac{d_{M_n} - d_E}{d_{M_n}}$ dans [Mon68, p. 608], dont le maximum pour $n = 0$, 1, 2 et 3 est 41.4%, 8.2%, 2.7% et 1.3%. Il préconise l'emploi de d_{M_2}, dont la boule est un hexadécagone.

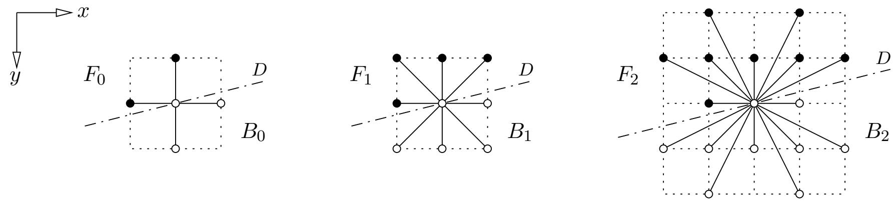


FIG. 3.8 – *Demi-masque avant F_n et arrière B_n de Montanari.*

3.3.2 Distances et masques de chanfrein

Les distances de chanfrein généralisent les distances de Montanari au niveau du poids des arêtes, du voisinage du masque et de la dimension. En particulier, elles permettent de construire des distances discrètes qui approchent très finement d_E, tout en conservant le même algorithme simple et efficace de la DT de Rosenfeld.

On appelle *pondération* un point p associé à un poids w. Un *masque de chanfrein* $\mathcal{M}$ est un ensemble de pondérations. Deux points q et r sont dits *$\mathcal{M}$-adjacents* s'il existe une pondération $(p, w) \in \mathcal{M}$ telle que $\overrightarrow{qr} = \overrightarrow{Op}$; le poids de l'arête qr est fixé à w. Un *$\mathcal{M}$-chemin* est une suite de points deux à deux $\mathcal{M}$-adjacents. Le *coût* d'un chemin est la somme des poids de ses arêtes. La distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$ entre deux points est le coût du $\mathcal{M}$-chemin de coût minimal les rejoignant. La distance de chanfrein est donc la distance pondérée sur le graphe d'adjacence défini par le masque.

On dit qu'un masque de $\mathbb{Z}^n$ est de taille k (k impair) si k est le plus petit entier tel que tous les points du masque sont inclus dans $[-k/2, k/2]^n$. Dans $\mathbb{Z}^2$ il est commode de représenter les masques par une matrice, où les valeurs non nulles représentent à la fois les points du masque (relativement à O) et leur poids. Étant donné des poids a, b et c, on note $\langle . \rangle$ les masques

$$\langle a \rangle = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & O & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle a, b \rangle = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & O & a \\ b & a & b \end{pmatrix}, \quad \langle a, b, c \rangle = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & c & 0 \\ c & b & a & b & c \\ 0 & a & O & a & 0 \\ c & b & a & b & c \\ 0 & c & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

et $d_{\langle . \rangle}$ les distances correspondantes. Lorsqu'il y a une ambiguité, on utilise une notation longue du masque en rajoutant les coordonnées des pondérations ; sauf mention contraire, le masque est toujours G-symétrique et on ne donne que son générateur. Par exemple, la notation longue de $\langle a, b \rangle$ est $\langle (0, 1; a), (1, 1; b) \rangle$. Les points non-visibles sont laissés à 0 par soucis d'efficacité (mais ce n'est pas une obligation).

On retrouve les distances de connexité avec $d_4 = d_{\langle 1 \rangle}$ et $d_8 = d_{\langle 1,1 \rangle}$; les distances de Montanari avec $d_{M_1} = d_{\langle 1, \sqrt{2} \rangle}$ et $d_{M_2} = d_{\langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{5} \rangle}$. La première apparition d'un masque différent est probablement due à Hilditch dans [Hil69] avec le masque $\langle 2, 3 \rangle$. Il revient à approcher $\langle 1, \sqrt{2} \rangle$ par $\langle 1, 3/2 \rangle$, en divisant tout par un facteur d'échelle $a = 2$. On trouve une apparition ultérieure de $\langle 2, 3 \rangle$ dans [Bar77], pour un algorithme de mise en correspondance appelé « chamfer matching », un terme emprunté à la taille du bois, à cause du comportement caractéristique de leur algorithme.

C'est Borgefors qui popularise les distances de chanfrein avec deux articles célèbres. Dans [Bor84], elle passe en revue les DT séquentielles de la dimension 1 à la dimension 4 pour les principales distances utilisées en analyse d'images, dont les distances de connexité, les distances octogonales, la distance euclidienne et les distances de chanfrein. Elle limite son étude des masques de chanfrein en dimension n aux masques de taille 3, et propose un critère d'optimisation des poids pour approximer d_E. Elle préconise $\langle 3,4\rangle$ en 2D, $\langle(0,0,1;3),(0,1,1;4),(1,1,1;5)\rangle$ en 3D et $\langle(0,0,0,1;3),(0,0,1,1;4),(0,1,1,1;5),(1,1,1,1;6)\rangle$ en 4D. Dans [Bor86], elle reprend son étude en 2D uniquement, sur les masques de taille 3, 5 et 7, et développe sa méthode d'optimisation. Elle préconise en particulier le masque $\langle 5,7,11\rangle$, qui revient à approcher $\langle 1,\sqrt{2},\sqrt{5}\rangle$ par $\langle 1,7/5,11/5\rangle$. On montre figure 3.9 des images de distances pour $d_{\langle 3,4\rangle}$ et $d_{\langle 5,7,11\rangle}$.

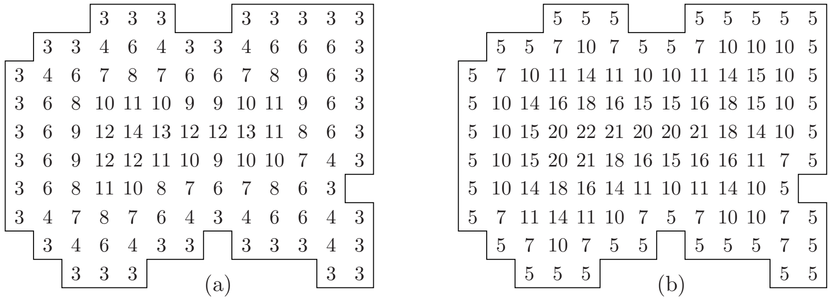


FIG. 3.9 – *DM pour (a)* $d_{\langle 3,4\rangle}$ *et (b)* $d_{\langle 5,7,11\rangle}$.

Par la suite, de multiples méthodes d'optimisations sont développés en 2D dans [Vos88] [Bec89] [Bor91a] [Ver91b] [Thi92c] [Bec92a] [Bol92] [Coq93] [Thi94d, chap. 4] [Coq95] [But98], en 3D dans [Ver91b] [Coq94] [Bor96] [Thi00b] [Bor01] [Rem01] et en 4D dans [Bor00]. Ces méthodes consistent à fixer un masque, puis à rechercher les poids qui minimisent un critère d'erreur par rapport à d_E. Plusieurs critères sont débattus, le but étant l'isotropie des mesures. Nous proposons de nouveaux résultats au §5.3.

3.3.3 Algorithmes DT et RDT en dimension n

Nous redonnons ici les algorithmes classiques DT et RDT pour les masques de chanfrein en dimension n. La transformation de distance (DT) consiste à étiqueter chaque point objet d'une image à sa distance au complémentaire (cf §3.1). La transformation de distance inverse (RDT) est une variante de DT, qui permet de retrouver un objet à partir de son axe médian. Dans les deux algorithmes, la transformation est effectuée en deux passes séquentielles sur l'image, indépendamment de la dimension et de l'épaisseur des objets dans l'image. La complexité est linéaire, en $O(m.L^n)$ pour une image de côté L en dimension n et un masque à m pondérations.

La transformation de distance DT, encore appelée algorithme de Rosenfeld, a pour origine [Ros66] pour d_4 et d_8 (cf §3.2.1) ; elle a été généralisée en 2D pour les distances de Montanari d_{M_n} dans [Mon68] (cf §3.3.1) ; Borgefors l'a adapté dans [Bor84] pour les masques de taille 3 en dimension n, puis dans [Bor86] pour les masques de taille 5 et 7 en dimension 2.

La transformation de distance inverse RDT a également pour origine [Ros66] pour d_4 et d_8, puis [Mon68] pour d_{M_n}. La RDT prend en entrée une image où un certain nombre de points p_i sont à une valeur positive r_i, et les autres points sont à 0 ; en sortie, l'ensemble des points strictement positifs correspond à l'union des boules $B_{\mathcal{M}}(p_i,r_i)$.

Soit $\mathcal{M}$ un masque de chanfrein symétrique par rapport à l'origine. On construit les demi-masques de $\mathcal{M}$ à partir du sens du balayage de l'image (qui est arbitraire). Le demi-masque avant (resp. arrière) est l'ensemble des pondérations du masque situés avant (resp. après) son centre dans le sens du balayage. En 2D, ce découpage est équivalent à celui que fait Montanari avec une droite dans la figure 3.8. Étant donné une image I de bornes L, c'est-à-dire de taille

$(L_1+1)\times\cdots\times(L_n+1)$, on considère le sens de balayage suivant :

$$\textbf{for } x_n = 0 \textbf{ to } L_n\,,\ \textbf{for } x_{n-1} = 0 \textbf{ to } L_{n-1}\,,\ \ldots\,,\ \textbf{for } x_1 = 0 \textbf{ to } L_1 \textbf{ do}\,. \tag{3.12}$$

Le demi-espace H^n constitué des points situés après l'origine dans le sens du balayage est

$$H^n = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} \Big\{ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}^n \ :\ (x_k>0) \text{ et } (x_i = 0 \text{ pour } k<i\leqslant n) \Big\}. \tag{3.13}$$

Le demi-masque arrière est $\mathcal{M}^h = \{\,(p,w)\in\mathcal{M}\ :\ p\in H^n\,\}$; le demi-masque avant est par symétrie $-\mathcal{M}^h$. La figure 3.10 montre le résultat du découpage d'un masque de taille 5 en dimensions 2 et 3. Les algorithmes DT et RDT sont donnés figures 3.11 et 3.12 en dimension n pour un demi-masque de chanfrein de taille quelconque.

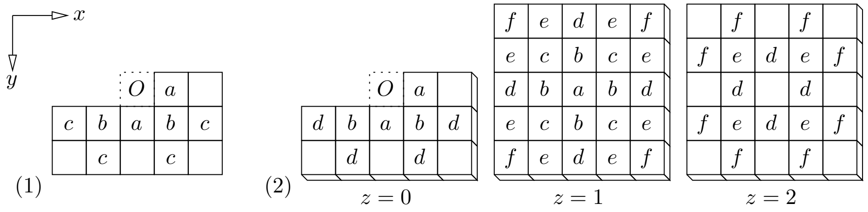


FIG. 3.10 – *Demi-masque de chanfrein arrière* $\mathcal{M}^h$*, (1) en 2D pour le masque* $\langle a,b,c\rangle$*, (2) en 3D pour le masque* $\langle(1,0,0;a),(1,1,0;b),(1,1,1;c),(2,1,0;d),(2,1,1;e),(2,2,1;f)\rangle$.

Procedure CalculeDT ($\mathcal{M}^h$, I, L) ;
// Balayage avant
for $x_n = 0$ **to** L_n , **for** $x_{n-1} = 0$ **to** L_{n-1} , ... , **for** $x_1 = 0$ **to** L_1 **do**
  if $I[x_1,...,x_n] \neq 0$ **then** *// Point objet*
  {
    $k = +\infty$;
    for each (p,w) **in** $\mathcal{M}^h$ **do** $k = \min\{\,k\,,\ I[(x_1,...,x_n) - \overrightarrow{Op}] + w\,\}$;
    $I[x_1,...,x_n] = k$;
  }
// Balayage arrière
for $x_n = L_n$ **to** 0 , **for** $x_{n-1} = L_{n-1}$ **to** 0 , ... , **for** $x_1 = L_1$ **to** 0 **do**
  if $I[x_1,...,x_n] \neq 0$ **then** *// Point objet*
  {
    $k = I[x_1,...,x_n]$;
    for each (p,w) **in** $\mathcal{M}^h$ **do** $k = \min\{\,k\,,\ I[(x_1,...,x_n) + \overrightarrow{Op}] + w\,\}$;
    $I[x_1,...,x_n] = k$;
  }

FIG. 3.11 – *DT pour les distances de chanfrein en dimension n.* ***Entrées :*** $\mathcal{M}^h$ *le demi-masque de chanfrein, I l'image binaire, L les bornes de I.* ***Sortie :*** *I est l'image de distance.*

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les transformations de distance, qui sont au cœur de nombreuses applications en analyse d'image, en reconnaissance de forme, en codage, et même

Procedure CalculeRDT $(\mathcal{M}^h, I, L)$;
// Balayage avant
for $x_n = 0$ **to** L_n , **for** $x_{n-1} = 0$ **to** L_{n-1} , $\ldots$, **for** $x_1 = 0$ **to** L_1 **do**
{
  $k = I[x_1, ..., x_n]$;
  for each (p, w) **in** $\mathcal{M}^h$ **do** $k = \max\{\, k\,,\, I[(x_1, ..., x_n) - \overrightarrow{Op}] - w \,\}$;
  $I[x_1, ..., x_n] = k$;
}
// Balayage arrière
for $x_n = L_n$ **to** 0 , **for** $x_{n-1} = L_{n-1}$ **to** 0 , $\ldots$, **for** $x_1 = L_1$ **to** 0 **do**
{
  $k = I[x_1, ..., x_n]$;
  for each (p, w) **in** $\mathcal{M}^h$ **do** $k = \max\{\, k\,,\, I[(x_1, ..., x_n) + \overrightarrow{Op}] - w \,\}$;
  $I[x_1, ..., x_n] = k$;
}

FIG. 3.12 – *RDT pour les distances de chanfrein en dimension n.* ***Entrées*** *: $\mathcal{M}^h$ le demi-masque de chanfrein, I une image de poids, L les bornes de I.* ***Sortie*** *: I contient la forme générée.*

dans le rendu d'images et en compression d'images.

Nous avons passé en revue les principales familles de distances discrètes, avec leur caractéristiques et une analyse bibliographique. Toutes ces distances ont pour but d'approximer la distance euclidienne d_E avec des entiers ; le large choix offert permet de faire un bon compromis en fonction de chaque application.

Les distances de connexité sont les plus simples à mettre en œuvre, les plus rapides à calculer, mais approximent assez grossièrement d_E. Les distances octogonales ont des propriétés intéressantes, approximent déjà mieux d_E, mais leur calcul et leur utilisation sont un peu plus délicats.

La distance euclidienne d_E (qui n'est pas discrète) et la fonction d_E^2 (qui n'est pas une distance) sont intensivement étudiées depuis 1980, et de nombreuses DT ont été proposées ; les plus récentes fournissent un résultat exact, sont devenues très efficaces, mais au prix d'algorithmes particulièrement complexes ; le meilleur compromis semble être la DT de Saito et Toriwaki [Sai94].

Les distances de chanfrein d_C présentent de nombreux attraits, qui justifient leur succès dans les applications. Elles permettent d'approximer très finement d_E en nombres entiers. Ce sont des distances locales, c'est-à-dire qui permettent de déduire une distance à partir des distances de voisins proches, contrairement à d_E. Le calcul de l'axe médian se fait également par un test local de taille fixe, contrairement à d_E où la taille du voisinage de test croît avec le rayon (cf §6). Tous les calculs se passent en nombres entiers et avec des opérations linéaires ($+$, $-$, $<$).

L'attrait principal des d_C est la grande rapidité — et la simplicité — de la DT de Rosenfeld et Pfaltz [Ros66], généralisée par Montanari [Mon68] et adaptée par Borgefors [Bor84]. La transformation est globale avec 2 passes sur l'image, indépendamment de l'épaisseur des objets dans l'image, et quelle que soit la dimension. L'algorithme inverse (RDT) permet de retrouver un objet à partir de son axe médian, également en 2 passes, ce qui n'est pas le cas pour d_E. Enfin, les d_C possèdent de remarquables propriétés arithmétiques et géométriques, que nous explorons dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Propriétés fondamentales des masques de chanfrein

Nous exposons dans ce chapitre notre contribution théorique sur les propriétés fondamentales des masques de chanfrein dans un module en dimension finie. Après quelques exemples de masques et une analyse bibliographique au §4.1, nous montrons au §4.2 que tout masque de chanfrein induit une distance dans un module et une norme dans un espace vectoriel. De là nous élaborons un critère de norme discrète au §4.3 en faisant un aller-retour dans l'espace euclidien.

4.1 Vers une classification des masques

Les masques de chanfrein offrent un grand degré de liberté dans leur construction, entre le choix des points du masque et de leurs poids. Par exemple, l'ensemble des points du masque peut être l'ensemble des points visibles dans un voisinage carré (masque *complet*), ou une partie seulement ; il peut même comporter des points non visibles ; il peut être G-symétrique (cf §2.5.2), symétrique par orthant, central-symétrique, non-symétrique, etc. Le choix des poids est tout aussi important, car il peut modifier directement le rôle des pondérations dans les chemins minimaux. On peut enfin considérer des masques sur la maille carrée, rectangulaire, hexagonale, sur un graphe, etc.

Les différents masques de chanfrein peuvent avoir des comportements très différents ; l'intérêt de classifier les masques est donc évident. On cherche les propriétés prévisibles d'un masque, telles que la géométrie des boules, leurs symétries, connexité, convexité et homogénéité, ainsi que des formules directes. La propriété la plus forte d'un masque est d'induire une norme.

Nous passons en revue quelques exemples pour illustrer les différents phénomènes qui apparaissent couramment ; puis nous rappelons l'historique de la découverte des propriétés dans la littérature.

4.1.1 Exemples

Nous présentons figure 4.1 des exemples de boules de chanfrein pour des masques G-symétriques dans $\mathbb{Z}^2$. Les points des boules sont étiquetés à leur distance à O. La boule de centre O et de rayon R pour un masque $\langle . \rangle$ est notée $B_{\langle . \rangle}(R)$.

Pour alléger l'écriture des masques, nous notons une pondération (p, w) par $p\,w$, et utilisons des lettres en gras pour désigner les points visibles (cf §5.1.1), avec $\mathsf{a} = (1,0)$, $\mathsf{b} = (1,1)$, $\mathsf{c} = (2,1)$, $\mathsf{d} = (3,1)$, $\mathsf{e} = (3,2)$, $\mathsf{f} = (4,1)$, $\mathsf{g} = (4,3)$, $\mathsf{h} = (5,1)$, etc. Par exemple, le masque $\langle (1,0;5), (1,1;7), (3,1;16) \rangle$ est abrégé par $\langle \mathsf{a}\,5, \mathsf{b}\,7, \mathsf{d}\,16 \rangle$. De plus nous omettons de mettre le nom des points visibles dans le masque lorsqu'ils sont à leur place par rapport à l'ordre alphabétique ; ainsi notre masque est noté $\langle 5, 7, \mathsf{d}\,16 \rangle$. La notation longue (avec les coordonnées) est conservée lorsque des points du masque sont non visibles.

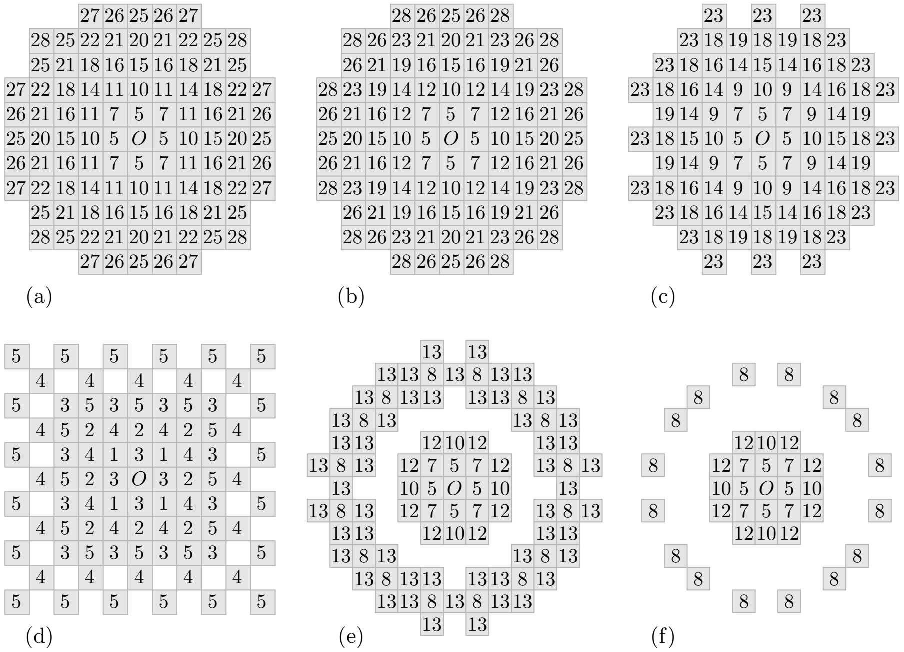


FIG. 4.1 – *Galerie de boules de chanfrein 2D : (a)* $B_{\langle 5,7,11 \rangle}(28)$*, (b)* $B_{\langle 5,7,\mathsf{d}\,16 \rangle}(28)$*, (c)* $B_{\langle 5,7,9 \rangle}(23)$*, (d)* $B_{\langle 3,1 \rangle}(5)$*, (e)* $B_{\langle 5,7,\mathsf{g}\,8,\mathsf{h}\,8 \rangle}(13)$*, (f)* $B_{\langle 5,7,\mathsf{g}\,8,\mathsf{h}\,8 \rangle}(12)$*.*

La figure 4.1.a représente la boule de rayon 28 du masque $\langle 5, 7, 11 \rangle$ de [Bor86]. Ce masque définit une norme, et donc ses boules sont des polytopes discrets (des hexadécagones à partir d'un certain rayon).

Le masque $\langle 5, 7, \mathsf{d}\,16 \rangle$ de la figure 4.1.b est un contre-exemple qui vient illustrer le §2.3.4 (c'est-à-dire convexité $\not\Rightarrow$ norme). En effet, toutes les boules de ce masque sont convexes, et pourtant il ne définit pas une norme : la non-homogénéité se manifeste avec le point $(2,1)$ qui est à 12 tandis que $(4,2)$ est à 23.

La boule figure 4.1.c de $\langle 5, 7, 9 \rangle$ n'est ni homogène ni convexe, et ne définit pas une norme.

La boule de $\langle 3, 1 \rangle$ à la figure 4.1.d est non simplement connexe. L'analyse de ce masque dans [Rem01] montre l'apparition de deux réseaux dans les chemins minimaux à l'origine : le réseau non unimodulaire L de base $\{(1,1), (-1,1)\}$, dont le coût des arêtes est 1, et le réseau translaté $L + \overrightarrow{O\mathsf{a}}$.

Nous avons contruit le masque $\langle 5, 7, \mathsf{g}\,8, \mathsf{h}\,8 \rangle$ pour montrer le caractère extravagant de certaines boules : dans la figure 4.1.e, la boule est en deux parties non connexes, l'une formant une couronne autour de l'autre. La boule de rayon 12 pour le même masque présente figure 4.1.f des points isolés (les G-symétriques de g et h, marqués à 8).

Ces quelques exemples montrent que les boules de chanfrein peuvent être très différentes avec des masques relativement simples.

4.1.2 Cheminement

Dans la littérature, la plupart des études des masques de chanfrein sont consacrées à l'optimisation (minimisation de l'erreur par rapport à d_E), avec peu de résultats sur les propriétés des masques. Nous revenons sur leur découverte.

Contraintes naturelles de Borgefors

Borgefors s'intéresse aux masques G-symétriques (« balanced ») dans la maille carré, avec une incursion dans la maille hexagonale [Bor88a] (une étude dans la maille rectangulaire est faite dans [Coq95], mais uniquement sur l'aspect optimisation).

Dans [Bor84] et [Bor86], les distances de chanfrein sont considérées comme un simple résultat produit par l'algorithme de Rosenfeld modifié, où $\sqrt{u^2+v^2}$ est remplacé par w dans (3.9) et (3.10). Borgefors sous-entend que les masques de chanfrein n'induisent pas toujours une distance, et propose quelques contraintes « naturelles » sur les poids pour que le théorème du plus court chemin de [Mon68, thm. 1] reste valide, et en particulier pour que les plus courts chemins soient *uniques*. Par exemple pour un masque $\langle a, b\rangle$, ses contraintes sont $a < b < 2a$. Elle montre que la boule d'un tel masque est un octogone, et que

$$d_{\langle a,b\rangle}(O,(x,y)) = yb + (x-y)a \quad \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x\,. \tag{4.1}$$

Dans [Bor86], elle insiste sur la nécessité de contraintes de validité, mais sans les donner. Elle montre que les pondérations divisent la boule en cônes, et que tout chemin minimal de O à un point p n'est formé que des 2 arêtes du cône dans lequel se trouve p. Elle donne les formules directes pour les masques 2D de taille 5 et 7 pour chaque cône, mais ne dévoile pas comment elles sont obtenues. Ces formules sont nécessaires pour sa méthode d'optimisation. Par exemple pour un masque $\langle a, b, c\rangle$, on a

$$d_{\langle a,b,c\rangle}(O,(x,y)) = y(c-2a) + xa \qquad \text{si } 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{1}{2}x, \text{ et} \tag{4.2}$$
$$d_{\langle a,b,c\rangle}(O,(x,y)) = y(2b-c) + x(c-b) \quad \text{si } \tfrac{1}{2}x \leqslant y \leqslant x\,. \tag{4.3}$$

Formalisation par Verwer

Verwer propose dans [Ver91b] et [Ver91a] une définition vectorielle d'un masque et formalise la définition des distances de chanfrein en termes de chemins minimaux. Nous nous inspirerons de ce formalisme dans la suite. Sa contribution essentielle au niveau des propriétés des masques de chanfrein est de prouver dans [Ver91a, p. 20] que, contrairement à ce que l'on pensait, *tout* masque de chanfrein induit une distance (avec quelques hypothèses très faibles). Le théorème de Verwer est resté ignoré jusqu'à très récemment. Nous reprenons sa démonstration plus généralement dans un module au §4.2.2.

Étude arithmétique de Thiel

Nous avons développé dans notre thèse [Thi94d, chap. 3] une théorie des distances de chanfrein dans $\mathbb{Z}^2$, qui s'appuie sur les suites de Farey (voir §5.1). Nous étudions les *déplacements élémentaires* dx et dy (différence de valeurs sur une DM entre deux pixels 1-voisins en x et en y) et montrons qu'ils sont constants dans un *cône d'influence*, c'est-à-dire un cône délimité par deux pondérations qui correspondent à des termes consécutifs dans une suite de Farey. Nous donnons les formules générales de dx et dy, puis donnons les formules directes des distances de chanfrein jusqu'à 5 pondérations. Nous étudions la géométrie des boules de chanfrein, et montrons comment rendre la boule convexe à partir de contraintes sur les poids et de l'ordre

angulaire des points visibles dans les suites de Farey ; les contraintes obtenues généralisent d'une certaine manière les contraintes de plus court chemin de Borgefors.

Malheureusement, la partie de ce travail sur les conditions de distance et de normes dans [Thi94d, §3.4 et §3.5.1] est invalidée par le théorème de Verwer [Ver91a, p. 20] et l'étude du rapport entre convexité et normes au §2.3.4.

Régularité de Borgefors

Borgefors reprend son étude des propriétés des masques en 3D dans [Bor96]. Elle donne une définition de ses « contraintes naturelles », appelées contraintes de régularité :

Définition 4.1 (Régularité de Borgefors) *Si tout chemin ne comportant qu'un seul type d'arête du masque est un chemin minimal, alors le masque est dit semi-régulier ; si de plus ce chemin minimal est unique, alors le masque est dit régulier.*

Par ce biais elle cherche manifestement à retrouver le théorème [Mon68, thm. 1] de Montanari avec la structure unique des chemins (mais sans adapter ses formules). Elle conjecture que les masques réguliers 3D sont des distances (cf théorème de Verwer), pour justifier la notion de régularité. Ensuite elle décrit sa méthode d'« investigation » (par énumération de chemins) pour déterminer les contraintes de régularité sur les poids pour les masques $\langle(1,0,0;a),(1,1,0;b),(1,1,1;c)\rangle$. Elle trouve deux cas de figure, avec dans les deux cas $a < b < 2a$ et $b < c < \frac{3}{2}b$, puis pour le cas I : $a + c < 2b$ (voir aussi [Bec92b]), et le cas II : $a + c > 2b$. Si l'une au moins des inégalités n'est pas stricte, alors le masque est semi-régulier. Elle donne les formules directes de distance pour $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$:

$$\text{cas I :} \quad d_{\langle a,b,c\rangle}(O,(x,y,z)) = z(c-b) + y(b-a) + xa\,, \tag{4.4}$$
$$\text{cas II :} \quad d_{\langle a,b,c\rangle}(O,(x,y,z)) = z(c-b) + y(c-b) + x(2b-c) \quad \text{si } x \leqslant y+z\,, \tag{4.5}$$
$$d_{\langle a,b,c\rangle}(O,(x,y,z)) = z(b-a) + y(b-a) + xa \quad \text{si } x \geqslant y+z\,. \tag{4.6}$$

Cette étude est poursuivie par Borgefors dans [Bor00] en 4D pour des masques de taille 3, puis avec Svensson dans [Bor01] en 3D pour des masques de taille 5 à 4 pondérations $\langle(1,0,0;a),(1,1,0;b),(1,1,1;c),(2,1,1;e)\rangle$, et dans [Sve01] en 3D pour les masques de taille 5 à 6 pondérations. Les « investigations » pour trouver les contraintes de régularité et les formules directes de distances sont relativement pénibles, car manuelles, et difficilement généralisables à des masques de taille supérieure.

Un essai de Kiselman

Kiselman étudie dans [Kis96] la régularité de Borgefors sous un aspect théorique. Il introduit en particulier un formalisme pour définir une DT en terme de *convolutions infimales* (voir par exemple [Mor70]) et cherche à montrer dans quel cas un masque de chanfrein induit une distance (cf théorème de Verwer). Kiselman montre pour toute distance de chanfrein d *homogène* dans $\mathbb{Z}^n$, que d est une distance si et seulement si d est une fonction convexe, et que si d est une fonction convexe alors d est semi-régulière [Kis96, thm. 6.2]. Il montre que la réciproque est vraie pour $n = 2$ [Kis96, thm. 5.1], mais fausse pour $n \geqslant 3$ sur un contre-exemple (une fonction semi-régulière mais pas convexe).

Le principal problème dans son approche est de supposer que d est homogène ; or c'est précisément la propriété que l'on cherche à caractériser. Voici deux contre-exemples qui montrent qu'un masque peut être semi-régulier sans être homogène :

- ▷ Dans [Rem01, §3.2.4], Remy montre dans $\mathbb{Z}^3$ que le masque $\langle(1,0,0;20),(1,1,0;28),(1,1,1;31),(2,1,1;47)\rangle$ est régulier (les conditions de régularité d'un tel masque sont données dans [Bor01]), mais sa distance d n'est pas homogène car $d(O,(5,3,1)) = 123$ alors que $d(O,(10,6,2)) = 244$.

▷ Nous donnons un contre-exemple dans $\mathbb{Z}^2$ avec le masque $\langle 5, 7, \mathsf{d}\,16\rangle$ de la figure 4.1.b : sa distance d n'est pas homogène (on a $d(O,(2,1)) = 12$ et $d(O,(4,2)) = 23$) alors que ce masque est bien semi-régulier.

En conclusion, une distance régulière (ou semi-régulière) au sens de Borgefors n'est pas forcément homogène et n'induit donc pas toujours une norme ; par contre, une norme est toujours semi-régulière.

Contraintes de normes de Remy et Thiel

Nous avons commencé l'étude des masques de chanfrein de $\mathbb{Z}^3$ dans [Thi99] et [Thi00c], à partir des résultats de [Thi94d, chap. 3] dans $\mathbb{Z}^2$. Le passage du 2D au 3D fait perdre l'ordre angulaire entre les points visibles, mais la triangulation des boules n'est plus unique. Nous exploitons les propriétés des ensembles de Farey et des triangulations de Farey. Nous étudions les structures qui apparaissent dans les sphères de chanfrein, telles que les déplacements élémentaires et les cônes d'influence. Nous définissons la *boule rationnelle équivalente* d'un masque et montrons comment la rendre convexe. Nous donnons les formules directes des déplacements élémentaires, du gradient discret et de la distance de chanfrein dans un cône d'influence, et les appliquons sur des masques à 3 et 4 pondérations.

La partie de ce travail sur les conditions de distance est encore une fois invalidée par le théorème de Verwer. Dans [Thi00b] nous reprenons cette étude et commençons à réunir les conditions de norme ; mais l'argumentation est incomplète. Ce n'est que très récemment que nous avons compris exactement quelles sont les conditions de norme, et où intervient finalement la convexité dans la démonstration. Eric Remy et moi-même présentons chacun ce nouveau résultat et plusieurs preuves différentes, avec une analyse plus poussée dans $\mathbb{Z}^3$ dans [Rem01], et une généralisation sur un module en dimension finie dans ce document.

4.2 Propriétés générales des masques

Nous définissons dans cette section un masque et une distance de chanfrein dans un module. On se sert d'un module (cf §2.2.2) pour avoir une notion cohérente de chemin et d'homogénéité. Nous montrons que tout masque de chanfrein induit une distance dans un module, et une norme dans un espace vectoriel.

4.2.1 Définitions

Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Une *pondération* est un couple $(\vec{v}, w)$ formé d'un vecteur $\vec{v} \in E$, appelé *déplacement*, et d'un scalaire $w \in F$, appelé *coût* ou *poids*. Le coût w associé à un déplacement $\vec{v}$ est encore noté $W(\vec{v})$. Un *masque* $\mathcal{M}$ est un ensemble fini

$$\mathcal{M} = \left\{ (\vec{v}_i, w_i) \in E \times F \right\}_{1 \leqslant i \leqslant m} \tag{4.7}$$

de m pondérations. On dit qu'un masque $\mathcal{M}$ est *central-symétrique* si

$$\forall\, (\vec{v}, w) \in \mathcal{M},\ \exists\, (\vec{v}', w') \in \mathcal{M}, \qquad \vec{v} = -\vec{v}' \quad \text{et} \quad w = w' \,. \tag{4.8}$$

Les hypothèses minimales que nous fixons pour un masque de chanfrein sont les suivantes ; nous les justifions dans la suite. En particulier, un masque de chanfrein n'est pas vide.

Définition 4.2 (Masque de chanfrein) *Un masque de chanfrein est central-symétrique, de poids strictement positifs et de déplacements non nuls, et contient au moins une base de E.*

On note $\mathrm{CM}(E, A, F)$ l'ensemble des masques de chanfrein dans le module (E, A) à valeurs sur F. Par exemple, l'ensemble des masques de Montanari est un sous-ensemble de $\mathrm{CM}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$, et l'ensemble des masques entiers G-symétriques de Borgefors est un sous-ensemble de $\mathrm{CM}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Nous allons voir maintenant comment intervient l'anneau commutatif A.

Étant donné $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$, on appelle *chemin* (ou $\mathcal{M}$-*chemin*) une séquence

$$\mathcal{P} = \left\{ \alpha_1 \vec{v}_{i_1}, \ldots, \alpha_k \vec{v}_{i_k} \right\}, \quad 1 \leqslant i_j \leqslant m\,,\ \alpha \in A_+^k \tag{4.9}$$

de k déplacements. On peut toujours écrire de façon équivalente

$$\mathcal{P} = \left\{ \lambda_1 \vec{v}_1, \ldots, \lambda_m \vec{v}_m \right\}, \quad \lambda \in A_+^m \tag{4.10}$$

en regroupant les déplacements identiques. On note $V(\mathcal{P})$ le déplacement total

$$V(\mathcal{P}) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m \tag{4.11}$$

et on note $W(\mathcal{P})$ le coût total

$$W(\mathcal{P}) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \,. \tag{4.12}$$

Soit $p, q \in E$, on dit que $\mathcal{P}$ est un chemin de p à q si $V(\mathcal{P}) = \overrightarrow{pq}$. On a un résultat sur l'existence des chemins entre points :

Lemme 4.1 *Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$, alors $\forall\, p, q \in E$, il existe toujours un chemin de p à q.*

Preuve. Selon la définition 4.2, $\mathcal{M}$ contient au moins une base de E, donc il existe $\alpha \in A_+^m$ tel que $\overrightarrow{Op} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m$ et $\beta \in A_+^m$ tel que $\overrightarrow{Oq} = \beta_1 \vec{v}_1 + \cdots + \beta_m \vec{v}_m$. En posant $\gamma = \beta - \alpha$ on a $\overrightarrow{pq} = \gamma_1 \vec{v}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{v}_m$. Si $\gamma \geqslant 0$ alors $\{\gamma_1 \vec{v}_1, \ldots, \gamma_m \vec{v}_m\}$ est bien un chemin de p à q. Sinon, on utilise le fait que $\mathcal{M}$ est central-symétrique : pour chaque $i \in [1, m]$, il existe $j \in [1, m]$ tel que $\vec{v}_j = -\vec{v}_i$ et $w_j = w_i$. Soit $\delta = \gamma_i + \gamma_j$; si $\delta \geqslant 0$ on pose $\gamma_i = 0$ et $\gamma_j = \delta$, sinon $\gamma_i = -\delta$ et $\gamma_j = 0$. Finalement on a $\gamma \geqslant 0$ et on a encore $\overrightarrow{pq} = \gamma_1 \vec{v}_1 + \cdots + \gamma_m \vec{v}_m$, donc $\{\gamma_1 \vec{v}_1, \ldots, \gamma_m \vec{v}_m\}$ est un chemin de p à q. $\boxdot$

On dit que $\mathcal{P}$ est un chemin *minimal* s'il n'existe pas d'autre chemin $\mathcal{Q}$ de p à q tel que $W(\mathcal{Q}) < W(\mathcal{P})$. La distance de chanfrein entre p et q est le coût du chemin minimal de p à q :

$$d_{\mathcal{M}}(p, q) = \min_{\mathcal{P}} \left\{ W(\mathcal{P}) \ :\ V(\mathcal{P}) = \overrightarrow{pq} \right\} . \tag{4.13}$$

On peut enfin écrire la distance de chanfrein sans faire apparaître les chemins :

Définition 4.3 (Distance de chanfrein) *Soit $\mathcal{M} = \left\{ (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$ un masque de chanfrein. Soit $p, q \in E$. La distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$ entre p et q est*

$$d_{\mathcal{M}}(p, q) = \min \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \lambda_i w_i \ :\ \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \lambda_i \vec{v}_i = \overrightarrow{pq}\,,\ \lambda \in A_+^m \right\} . \tag{4.14}$$

Avec cette définition on peut considérer une distance de chanfrein par exemple pour un masque de $\mathrm{CM}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}, F)$ avec $F = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, de $\mathrm{CM}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}, F)$ avec $F = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, ou encore de $\mathrm{CM}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, F)$ avec $F = \mathbb{R}$. L'important est que F soit *compatible* avec A dans la définition du coût des chemins pour tout masque de $\mathrm{CM}(E, A, F)$; une condition nécessaire et suffisante est

$$\forall\, \lambda \in A_+\,,\ \forall\, w \in F_{+*}\,, \quad \lambda w \in F\,. \tag{4.15}$$

On suppose que c'est toujours le cas dans tout le document.

4.2.2 Preuve de distance dans un module

Verwer montre dans sa thèse [Ver91a, p. 20] que tout masque de chanfrein dans $\mathbb{Z}^n$ définit une distance. Nous refaisons la démonstration dans le cas général.

Théorème 4.1 *Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$ un masque de chanfrein ; alors $d_\mathcal{M}$ est une distance sur E.*

Preuve. On montre que les conditions de la définition 2.1 sont toujours respectées. Soit $\mathcal{M} = \{ (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$; soit $p, q \in E$, alors par le lemme 4.1 il existe un chemin de p à q. Soit $\mathcal{P} = \{\lambda_1\vec{v}_1, ..., \lambda_m\vec{v}_m\}$ un chemin minimal de p à q. Par (4.13) on a $d_\mathcal{M}(p, q) = W(\mathcal{P})$.

- ▷ *Positive* (2.1). Pour tout i on a par définition $\lambda_i \geqslant 0$ et $w_i > 0$, donc $W(\mathcal{P}) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \geqslant 0$, et donc $d_\mathcal{M}(p, q) \geqslant 0$.
- ▷ *Définie* (2.2). Si $d_\mathcal{M}(p, q) = 0$, alors $W(\mathcal{P}) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$. Or $\lambda_i \geqslant 0$ et $w_i > 0$ $\forall\, i$, donc $\lambda_i = 0\ \forall\, i$, donc $\overrightarrow{pq} = V(\mathcal{P}) = \vec{0}$ et donc $p = q$. Réciproquement, si $p = q$, alors le chemin $\mathcal{Q} = \{0\,\vec{v}_1, ..., 0\,\vec{v}_m\}$ est un chemin de p à q car $V(\mathcal{Q}) = \vec{0} = \overrightarrow{pq}$. De plus $\mathcal{Q}$ est minimal car $W(\mathcal{Q}) = 0$, donc $d_\mathcal{M}(p, q) = W(\mathcal{Q}) = 0$.
- ▷ *Symétrique* (2.3). Le masque $\mathcal{M}$ étant central-symétrique, pour tout $(\vec{v}_i, w_i) \in \mathcal{M}$ il existe $(\vec{v}'_i, w'_i) \in \mathcal{M}$ tel que $\vec{v}_i = -\vec{v}'_i$ et $w_i = w'_i$. Donc $\lambda_1\vec{v}'_1 + \cdots + \lambda_m\vec{v}'_m = -\overrightarrow{pq}$ et $\mathcal{P}' = \{\lambda_1\vec{v}'_1, ..., \lambda_m\vec{v}'_m\}$ est un chemin de q à p, de coût $W(\mathcal{P}') = W(\mathcal{P})$. Si $\mathcal{P}'$ est un chemin minimal, alors $d_\mathcal{M}(q, p) = d_\mathcal{M}(p, q)$. Sinon, il existe un chemin minimal $\mathcal{Q}$ de q à p tel que $W(\mathcal{Q}) < W(\mathcal{P}')$. On peut construire le chemin $\mathcal{Q}'$ de p à q, avec $W(\mathcal{Q}') = W(\mathcal{Q})$. De là, $W(\mathcal{Q}') = W(\mathcal{Q}) < W(\mathcal{P}') = W(\mathcal{P})$, donc $\mathcal{P}$ n'est pas minimal, d'où contradiction.
- ▷ *Triangulaire* (2.4). Soit $r \in E$, $\mathcal{Q}_1 = \{\alpha_1\vec{v}_1, ..., \alpha_m\vec{v}_m\}$ un chemin minimal de p à r et $\mathcal{Q}_2 = \{\beta_1\vec{v}_1, ..., \beta_m\vec{v}_m\}$ un chemin minimal de r à q. Par (4.13) on a $d_\mathcal{M}(p, r) = W(\mathcal{Q}_1)$ et $d_\mathcal{M}(r, q) = W(\mathcal{Q}_2)$. Si $d_\mathcal{M}(p, r) + d_\mathcal{M}(r, q) < d_\mathcal{M}(p, q)$ alors $W(\mathcal{Q}_1) + W(\mathcal{Q}_2) < W(\mathcal{P})$. On considère la chemin concaténé $\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = \{(\alpha_1 + \beta_1)\vec{v}_1, ..., (\alpha_m + \beta_m)\vec{v}_m\}$. On a $V(\mathcal{Q}_3) = V(\mathcal{Q}_1) + V(\mathcal{Q}_2) = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{pq}$ donc $\mathcal{Q}_3$ est un chemin de p à q. De plus $W(\mathcal{Q}_3) = W(\mathcal{Q}_1) + W(\mathcal{Q}_2) < W(\mathcal{P})$, donc $\mathcal{P}$ n'est pas minimal, d'où contradiction. ⊡

Les masques de la figure 4.1 définissent donc tous des distances, et respectent en particulier l'inégalité triangulaire, aussi surprenant que cela puisse paraître.

La preuve du théorème 4.1 montre que les conditions de la définition 4.2 sont suffisantes pour avoir une distance d. Il est facile de voir que ces conditions sont aussi nécessaires (à une exception près). Si le masque n'est pas central-symétrique, alors d n'est pas symétrique. Si un poids est nul, alors d n'est pas définie, mais est un écart. Si un poids est négatif, alors d n'est pas positive. Si le masque ne contient pas de base de E, alors il n'existe pas toujours de chemin entre deux points. Finalement, on interdit le déplacement nul pour simplifier les preuves.

4.2.3 Preuve de norme dans un espace vectoriel

Nous montrons qu'une distance de chanfrein induit toujours une norme dans un espace vectoriel (EV) ; ce résultat est central pour comprendre le rôle joué par les pondérations. Nous commençons par montrer que toute distance de chanfrein dans un module est invariante par translation.

Lemme 4.2 *Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$, alors $d_\mathcal{M}$ est invariante par translation.*

Preuve. Soit $\mathcal{M} = \{ (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$. Soit $p, q \in E$, alors par le lemme 4.1 il existe un chemin de p à q. Soit $\mathcal{P} = \{\lambda_1\vec{v}_1, ..., \lambda_m\vec{v}_m\}$ un chemin minimal de p à q. Par (4.13) on a $d_\mathcal{M}(p, q) = W(\mathcal{P})$.

Montrons *l'invariance par translation* (2.26). Soit $r \in E$, $p' = p+r$ et $q' = q+r$. On a $\overrightarrow{p'q'} = \overrightarrow{pq}$, donc $\mathcal{P}$ est un chemin de p' à q'. Si $\mathcal{P}$ est minimal de p' à q' alors $d_\mathcal{M}(p', q') = W(\mathcal{P}) = d_\mathcal{M}(p, q)$. Sinon, il existe un chemin minimal $\mathcal{Q}$ de p' à q' tel que $W(\mathcal{Q}) < W(\mathcal{P})$. Or $\mathcal{Q}$ est aussi un chemin de p à q, donc $\mathcal{P}$ n'est pas minimal de p à q, d'où contradiction. ⊡

Théorème 4.2 *Soit K un corps commutatif, E un* EV *sur K et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$ un masque de chanfrein ; alors $d_\mathcal{M}$ induit une norme sur (E, K).*

Nous construisons notre preuve par l'absurde, de la même façon que pour le théorème 4.1 :

Preuve. Soit $\mathcal{M} = \{ (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$. L'EV (E, K) est aussi un module, donc par le théorème 4.1, $d_\mathcal{M}$ est une distance sur E. Il suffit donc de montrer que les conditions du lemme 2.1 sont toujours respectées. Par le lemme 4.2 on a l'invariance par translation. Soit $p, q \in E$, alors par le lemme 4.1 il existe un chemin de p à q. Soit $\mathcal{P} = \{\lambda_1\vec{v}_1, ..., \lambda_m\vec{v}_m\}$ un chemin minimal de p à q. Par (4.13) on a $d_\mathcal{M}(p, q) = W(\mathcal{P})$.

Montrons *l'homogénéité* (2.27). Soit $\alpha \in K$, $p' = \alpha p$ et $q' = \alpha q$.

- ▷ Cas où $\alpha = 0$. On a $p' = q' = O$, or $d_\mathcal{M}$ est une distance, donc par (2.2) on a $d_\mathcal{M}(p', q') = 0 = 0\, d_\mathcal{M}(p, q)$.
- ▷ Cas où $\alpha > 0$. On a $\overrightarrow{p'q'} = \alpha\,\overrightarrow{pq}$ et $\alpha\lambda_i \in K_+\ \forall\, i$, donc $\mathcal{Q}_1 = \{\alpha\lambda_1\vec{v}_1, ..., \alpha\lambda_m\vec{v}_m\}$ est un chemin de p' à q', de coût $W(\mathcal{Q}_1) = \alpha\, W(\mathcal{P})$. Si $\mathcal{Q}_1$ est un chemin minimal, alors $d_\mathcal{M}(p', q') = W(\mathcal{Q}_1) = \alpha\, W(\mathcal{P}) = \alpha\, d_\mathcal{M}(p, q)$. Sinon, il existe un chemin minimal $\mathcal{Q}_2 = \{\beta_1\vec{v}_1, ..., \beta_m\vec{v}_m\}$ de p' à q' tel que $W(\mathcal{Q}_2) < W(\mathcal{Q}_1)$. Or $\alpha^{-1} \in K$, donc on peut construire $\mathcal{Q}_3 = \{\alpha^{-1}\beta_1\vec{v}_1, ..., \alpha^{-1}\beta_m\vec{v}_m\}$, qui est un chemin de p à q car $\alpha^{-1}\beta_i \in K_+\ \forall\, i$ et $V(\mathcal{Q}_3) = \alpha^{-1}\, V(\mathcal{Q}_2) = \overrightarrow{pq}$. De là, $W(\mathcal{Q}_3) = \alpha^{-1}\, W(\mathcal{Q}_2) < \alpha^{-1}\, W(\mathcal{Q}_1) = W(\mathcal{P})$, donc $\mathcal{P}$ n'est pas minimal, d'où contradiction.
- ▷ Cas où $\alpha < 0$. Soit $r = -\alpha p - \alpha q$. On a $\alpha p + r = -\alpha q$ et $\alpha q + r = -\alpha p$, or $d_\mathcal{M}$ est invariante par translation, donc $d_\mathcal{M}(p', q') = d_\mathcal{M}(p' + r, q' + r) = d_\mathcal{M}(-\alpha q, -\alpha p)$. Comme $d_\mathcal{M}$ est une distance, par (2.3) on a $d_\mathcal{M}(-\alpha q, -\alpha p) = d_\mathcal{M}(-\alpha p, -\alpha q)$. Enfin, $-\alpha > 0$ donc $d_\mathcal{M}(-\alpha p, -\alpha q) = -\alpha\, d_\mathcal{M}(p, q)$ et de là $d_\mathcal{M}(p', q') = -\alpha\, d_\mathcal{M}(p, q)$. ⊡

Ce raisonnement ne peut être fait dans un module (E, A). Par exemple dans le cas $\alpha > 0$ de la preuve, si $\alpha^{-1} \notin A$, on ne peut pas construire le chemin $\mathcal{Q}_3$, donc le chemin $\mathcal{Q}_1$ n'est pas forcément minimal ; l'homogénéité n'est pas garantie et on ne sait pas si $d_\mathcal{M}$ induit une norme. Dans la suite du chapitre nous établissons un critère de norme de chanfrein dans un module.

Remy propose dans [Rem01, §4.2] une autre preuve de l'homogénéité dans $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, à partir la définition (4.14) en factorisant α dans les sommes.

On a vu dans §2.3.4 que toute boule de norme est convexe. On déduit donc du théorème 4.2 que dans un EV, les boules d'une distance de chanfrein sont convexes.

Corollaire 4.1 *Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$, alors $\forall\, r \in F_+$, $B_\mathcal{M}(O, r)$ est convexe.*

4.3 Étude des chemins minimaux

Nous étudions dans cette section la structure des chemin minimaux, dans le but de trouver une condition de norme de chanfrein dans l'espace discret. Notre stratégie consiste à plonger un masque discret dans l'espace euclidien, où il induit une norme, à caractériser ses propriétés, puis à revenir dans l'espace discret pour déterminer quelles sont les propriétés perdues. Pour ce faire nous commençons par définir un espace projectif au §4.3.1, puis nous déterminons le rôle des pondérations au §4.3.2, nous donnons ensuite une formule directe de distance dans un cône d'influence au §4.3.3, nous déterminons les conditions de norme discrète au §4.3.4, et introduisons enfin le spectre d'un masque au §4.3.5.

4.3.1 Représentation des ensembles de chemins

Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Étant donné un masque de chanfrein $\mathcal{M} = \{\, (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \,\} \in \mathrm{CM}(E, A, F)$, on note $\mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}}$ (pour *Chamfer Paths*) l'ensemble

$$\mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}} = \Big\{ \{\lambda_1 \vec{v}_1, ..., \lambda_m \vec{v}_m\} \ :\ \lambda \in (A^m_+)_* \Big\} \tag{4.16}$$

de tous les $\mathcal{M}$-chemins à coefficients dans A, privé du chemin nul. Le sous-ensemble de $\mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}}$ constitué des $\mathcal{M}$-chemins minimaux est noté $\mathrm{CSP}^A_{\mathcal{M}}$ (pour *Chamfer Shortest Paths*) :

$$\mathrm{CSP}^A_{\mathcal{M}} = \Big\{ \mathcal{P} \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}} \ :\ \forall\, \mathcal{Q} \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}} \cup \{\vec{0}\},\ V(\mathcal{P}) = V(\mathcal{Q}) \Rightarrow W(\mathcal{P}) \leqslant W(\mathcal{Q}) \Big\}. \tag{4.17}$$

Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}}$, alors par (4.16) on a $W(\mathcal{P}) > 0$. On peut toutefois construire un chemin $\mathcal{P}_0 \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}}$ tel que $V(\mathcal{P}_0) = \vec{0}$; cependant, un tel chemin n'est pas minimal puisque $W(\mathcal{P}_0) > 0 = W(\vec{0})$. Donc $\mathcal{P} \in \mathrm{CSP}^A_{\mathcal{M}} \Rightarrow V(\mathcal{P}) \neq \vec{0}$.

Nous allons étudier les propriétés des ensembles de chemins au travers de leur représentation dans un espace projectif, schématisé figure 4.2 (plus exactement dans une carte affine d'un espace projectif, voir [Ber90, §4.2]). On considère l'espace homogène $H = E \times F_{+*}$, le point $O' = (O, 1)$ dans H, et l'espace projectif $H' = \{ \frac{\vec{v}}{w} : (\vec{v}, w) \in H \}$ d'origine O'. Tout point p' de H' représente l'ensemble des couples $(\alpha\, \overrightarrow{O'p'}, \alpha)$ de H, avec $\alpha \in A_{+*}$. On note

$$f\ :\ (\vec{v}, w) \longmapsto O' + \frac{\vec{v}}{w} \tag{4.18}$$

la transformation homogène de H dans H'. Par exemple si $(E, F) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors H' est l'hyperplan $w = 1$ de H et f est la projection de centre O sur H'.

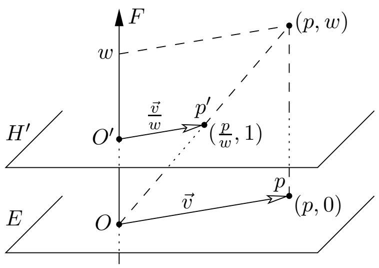


FIG. 4.2 – *Espace projectif H'.*

On note $f(\mathcal{M}) = \{\, f(\vec{v}_i, w_i) : 1 \leqslant i \leqslant m \,\}$. Pour tout chemin $\mathcal{P} \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}}$ on note $f(\mathcal{P}) = f\big(V(\mathcal{P}), W(\mathcal{P})\big)$. On définit enfin

$$\mathrm{RB}^A_{\mathcal{M}} = \Big\{ f(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathrm{CP}^A_{\mathcal{M}} \Big\} \tag{4.19}$$

l'image par f de tous les chemins, et

$$\mathrm{RSB}^A_{\mathcal{M}} = \Big\{ f(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathrm{CSP}^A_{\mathcal{M}} \Big\} \tag{4.20}$$

l'image par f de tous les chemins minimaux. Par construction on a $\mathrm{RSB}^A_{\mathcal{M}} \subset \mathrm{RB}^A_{\mathcal{M}} \subset H'$.

4.3.2 Rôle des pondérations dans l'espace euclidien

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel $(E, K) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ou $(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$, et un sous-groupe F de $\mathbb{R}$ (compatible avec K). Étant donné un masque de chanfrein $\mathcal{M} = \{\, (\vec{v}_i, w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant m \,\} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$, nous étudions les propriétés de $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ et $\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}}$, et nous en déduisons que les pondérations de $\mathcal{M}$ se rangent en deux catégories.

Lemme 4.3 *L'ensemble $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ est le n-polytope*

$$\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}} = \mathrm{conv}\Big\{ f(\vec{v}_i, w_i)\ :\ 1 \leqslant i \leqslant m \Big\}. \tag{4.21}$$

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{\lambda_1 \vec{v}_1, ..., \lambda_m \vec{v}_m\} \in \mathrm{CP}^K_{\mathcal{M}}$, on a

$$f(\mathcal{P}) = O' + \frac{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m}{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m} \tag{4.22}$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une combinaison convexe

$$f(\mathcal{P}) = O' + \frac{\lambda_1 w_1 \frac{\vec{v}_1}{w_1} + \cdots + \lambda_m w_m \frac{\vec{v}_m}{w_m}}{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m} \tag{4.23}$$

de $f(\vec{v}_i, w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Or K est un corps, donc toutes les combinaisons convexes sont atteintes lorsque $\mathcal{P}$ parcourt $\mathrm{CP}^K_{\mathcal{M}}$, et donc $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ est l'enveloppe convexe des points $f(\vec{v}_i, w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Or m est fini, donc l'ensemble $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ est un polytope. Par définition $\mathcal{M}$ contient au moins une base B de E, or B est aussi une base de H' et $\dim E = n$, donc $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ est de dimension n. ⊡

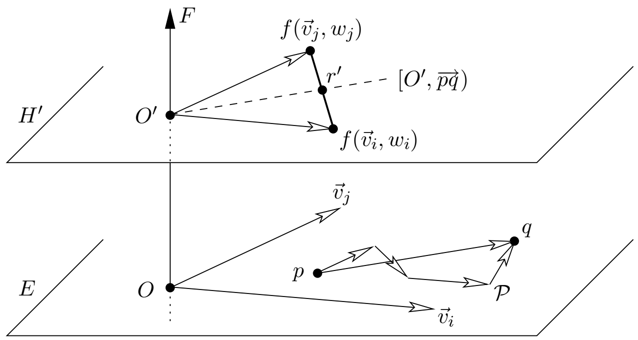


FIG. 4.3 – *Projection d'un chemin $\mathcal{P}$ de p à q.*

Lemme 4.4 *Soit $p, q \in E$, alors*

$$f\big(\overrightarrow{pq}, d_{\mathcal{M}}(p, q)\big) = \big[O', \overrightarrow{pq}\big) \cap \mathrm{fr}\big(\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}\big). \tag{4.24}$$

Preuve. Soit $p, q \in E$; on cherche où peut se situer $f\big(\overrightarrow{pq}, d_{\mathcal{M}}(p, q)\big)$.

1. Pour tout $w \in F_{+*}$ on a $f\big(\overrightarrow{pq}, w\big) = O' + \frac{\overrightarrow{pq}}{w}$, donc $f\big(\overrightarrow{pq}, d_{\mathcal{M}}(p, q)\big)$ est un point de la demi-droite $\big[O', \overrightarrow{pq}\big)$ (en pointillé figure 4.3).
2. Soit $w_1, w_2 \in F_{+*}$. Si $w_1 < w_2$ alors $\|\frac{\overrightarrow{pq}}{w_1}\|_2 > \|\frac{\overrightarrow{pq}}{w_2}\|_2$, donc le point $f\big(\overrightarrow{pq}, w_1\big)$ est plus éloigné de O' que $f\big(\overrightarrow{pq}, w_2\big)$ sur la demi-droite $\big[O', \overrightarrow{pq}\big)$.

3. Comme $d_{\mathcal{M}}(p,q)$ est le coût du chemin minimal de p à q, alors $f\big(\overrightarrow{pq}, d_{\mathcal{M}}(p,q)\big)$ est le point le plus éloigné possible de O' sur la demi-droite $\big[O', \overrightarrow{pq}\big)$.
4. Or $f\big(\overrightarrow{pq}, d_{\mathcal{M}}(p,q)\big) \in \mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$, et tous les points du polytope $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ sont réalisables, donc le point le plus éloigné possible de O' sur la demi-droite $\big[O', \overrightarrow{pq}\big)$ est $\big[O', \overrightarrow{pq}\big) \cap \mathrm{fr}\big(\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}\big)$ (point r' figure 4.3). ⊡

Corollaire 4.2 *L'ensemble* $\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}}$ *est l'ensemble des points frontière du polytope* $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ *:*

$$\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}} = \mathrm{fr}\big(\,\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}\,\big)\,. \tag{4.25}$$

Le lemme suivant établit le rôle des pondérations dans un masque. On dit qu'une pondération est *active* si sa suppression de $\mathcal{M}$ modifie $d_{\mathcal{M}}$, sinon elle est dite *inactive* (autrement dit elle ne sert jamais).

Lemme 4.5 *Une pondération* $(\vec{v}, w)$ *de* $\mathcal{M}$ *est active si et seulement si* $f(\vec{v}, w)$ *est un point extrême de* $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$.

Preuve. Le lemme 4.3 montre que $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}} = \mathrm{conv}(f(\mathcal{M}))$ par (4.26), donc par le théorème 2.2 de Krein et Milman, $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes, qui sont par construction des points de $f(\mathcal{M})$. Donc le polytope $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ et sa frontière $\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}}$ ne sont modifiés par la suppression d'un point $f(\vec{v}, w)$ de $f(\mathcal{M})$ que si $f(\vec{v}, w)$ est un point extrême de $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$. Or $\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}}$ est l'image par f des chemin minimaux, donc $d_{\mathcal{M}}$ n'est modifié par la suppression de l'une des pondérations $(\vec{v}, w)$ de $\mathcal{M}$ que si $f(\vec{v}, w)$ est un point extrême de $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$. ⊡

Remy arrive aux mêmes conclusion dans [Rem01, §4.2] en définissant le *masque rationnel équivalent* $\mathcal{M}'$ par le projeté de $\mathcal{M}$ sur H' :

$$\mathcal{M}' = \left\{ \left(\frac{\vec{v}_i}{w_i}, 1\right) \,:\, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}. \tag{4.26}$$

On a alors $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}} = B_{\mathcal{M}'}(O', 1)$, qui est une boule convexe par le corollaire 4.1. Remy développe ensuite un raisonnement incrémental : en partant d'un masque à n pondérations, il insère une pondération après l'autre dans le masque, et montre qu'une nouvelle pondération n'est active que si elle vient changer l'enveloppe convexe du masque rationnel équivalent.

4.3.3 Cône d'influence dans l'espace euclidien

Soit $(E, K) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ou $(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$ un espace vectoriel, F un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (compatible avec K) et $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$ un masque de chanfrein.

L'ensemble $\mathrm{RSB}^K_{\mathcal{M}}$ est, par le corollaire 4.2, l'union des facettes du n-polytope $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$. Soit $\mathcal{F}$ une facette de $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$; alors $\mathcal{F}$ est elle-même un $(n-1)$-polytope, dont les points extrêmes appartiennent à $f(\mathcal{M})$. On note $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des pondérations correspondant aux points extrêmes de $\mathcal{F}$. On a $\mathcal{F} = \mathrm{conv}\, f(\mathcal{M}|_{\mathcal{F}})$, donc tout chemin minimal $\mathcal{P}$ tel que $f(\mathcal{P}) \in \mathcal{F}$ n'est composé que des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}}$.

On note $\widehat{O\mathcal{F}}$ l'ensemble des points $p \in E$, tels que si $\mathcal{P}$ est un chemin minimal de O à p alors $f(\mathcal{P}) \in \mathcal{F}$. Donc pour tout $p \in \widehat{O\mathcal{F}}$, la distance $d_{\mathcal{M}}(O,p)$ est une fonction des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}}$ exclusivement. Par définition de $d_{\mathcal{M}}$ on a $f(\mathcal{P}) = f\big(\overrightarrow{Op}, d_{\mathcal{M}}(O,p)\big)$, donc par (4.24) on a

$$\widehat{O\mathcal{F}} = \Big\{ p \in E \,:\, \big[O', \overrightarrow{Op}\big) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset \Big\} \tag{4.27}$$

qui est un cône centré en O. On appelle $\widehat{O\mathcal{F}}$ le *cône d'influence* de $\mathcal{F}$.

La facette $\mathcal{F}$ est de dimension $n-1$, donc $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}}$ contient au moins n pondérations, mais par le théorème 2.1 de Carathéodory, toute combinaison convexe des points de $f(\mathcal{M}|_{\mathcal{F}})$ se ramène à une combinaison convexe de n points de $f(\mathcal{M}|_{\mathcal{F}})$. On appelle *sous-facette* de $\mathcal{F}$ un $(n-1)$-simplexe $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$, tel que $\mathcal{S}$ est l'enveloppe convexe de n points de $f(\mathcal{M}|_{\mathcal{F}})$. Alors $\forall p \in \widehat{O\mathcal{F}}$, il existe une sous-facette $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$, telle que $p \in \widehat{O\mathcal{S}}$. Par construction $\widehat{O\mathcal{S}}$ est un cône dont les vecteurs de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$ forment une base, donc tout point de $\widehat{O\mathcal{S}}$ est atteint par une combinaison à coefficients positifs des vecteurs de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$, autrement dit par un chemin minimal ne comportant que des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$.

Les facettes de $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ découpent E en cônes d'influences, chaque facette peut être triangulée en sous-facettes, et pour chaque sous-facette $\mathcal{S}$, la distance $d_{\mathcal{M}}$ est une fonction linéaire des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$. Nous donnons la formule directe de $d_{\mathcal{M}}$ pour tout point $p \in \widehat{O\mathcal{S}}$:

Théorème 4.3 (Formule directe) *Soit* $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(E, K, F)$ *un masque de chanfrein,* $\mathcal{F}$ *une facette de* $\mathrm{RB}^K_{\mathcal{M}}$ *et* $\mathcal{S}$ *une sous-facette de* $\mathcal{F}$*. Par construction on a* $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{M}|_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}$*. On note* $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}} = \{\, (\vec{v}_i, w_i) : 1 \leqslant i \leqslant n \,\}$*, où* $\vec{v}_i = (x_{i,1}, ..., x_{i,n})$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$*, et on note* $\Delta_{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n}$ *le déterminant (non nul) de la base* $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ *du cône d'influence* $\widehat{O\mathcal{S}}$ *:*

$$\Delta_{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n} \;=\; \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{4.28}$$

Alors $\forall\, p = (y_1, ..., y_n) \in \widehat{O\mathcal{S}}$ *on a :*

$$d_{\mathcal{M}}(O,p) \;=\; \frac{-1}{\Delta_{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n}} \cdot \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} & y_n \\ w_1 & \cdots & w_n & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.29}$$

Preuve. La valeur de distance $d_{\mathcal{M}}(O,p)$ est telle que $(\vec{v}_1, w_1), ..., (\vec{v}_n, w_n)$ et $\big(\overrightarrow{Op}, d_{\mathcal{M}}(O,p)\big)$ soient linéairement liés dans H, donc $d_{\mathcal{M}}(O,p)$ est la solution du système

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} & y_n \\ w_1 & \cdots & w_n & d_{\mathcal{M}}(O,p) \end{vmatrix} \;=\; 0\,. \tag{4.30}$$

En développant partiellement le déterminant par mineurs il vient

$$d_{\mathcal{M}}(O,p) \cdot \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} & y_n \\ w_1 & \cdots & w_n & 0 \end{vmatrix} \;=\; 0 \tag{4.31}$$

d'où le résultat. ⊡

Géométriquement parlant, $d_{\mathcal{M}}(O,p)$ est la « hauteur » pour passer du volume du parallélépipède $\big(0, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\big)$ au volume du parallélépipède $\big(0, (\vec{v}_1, w_1), ..., (\vec{v}_n, w_n), (\overrightarrow{Op}, 0)\big)$. On peut trouver aussi une autre formule pour $d_{\mathcal{M}}(O,p)$ en faisant un changement de base de $\overrightarrow{Op}$ dans la base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ puis en appliquant les poids $(w_1, ..., w_n)$:

$$d_{\mathcal{M}}(O,p) = \big(w_1, ..., w_n\big) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

On développe (4.29) par mineurs sur la dernière colonne, et on note chaque mineur

$$\delta_i = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta_{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n}} \cdot \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,i-1} & \cdots & x_{n,i-1} \\ x_{1,i+1} & \cdots & x_{n,i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \\ w_1 & \cdots & w_n \end{vmatrix} \tag{4.33}$$

que l'on appelle le *déplacement élémentaire* δ_i de la coordonnée y_i. On a alors la formule directe

$$d_{\mathcal{M}}(O,p) = y_1\,\delta_1 + \cdots + y_n\,\delta_n\,. \tag{4.34}$$

On déduit du théorème 4.3 que pour tout $R \in F_{+*}$, la boule $B_{\mathcal{M}}(O,R)$ est un polytope, qui a la même géométrie que $\mathrm{RB}^{K}_{\mathcal{M}}$ à un facteur d'échelle près. En application de (4.34) il vient l'équation de la facette de $B_{\mathcal{M}}(O,R)$ dans $\widehat{O\mathcal{S}}$

$$y_1\,\delta_1 + \cdots + y_n\,\delta_n = R \tag{4.35}$$

et les coordonnées $(\delta_1, ..., \delta_n)$ du vecteur normal à la facette.

4.3.4 Condition de norme dans l'espace discret

On se place dans le module $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ et on considère un masque de chanfrein $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}, F)$ avec $E = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Par le théorème 4.1, $d_{\mathcal{M}}$ est une distance dans $\mathbb{Z}^n$, et par le lemme 4.2, $d_{\mathcal{M}}$ est invariante par translation. On cherche à déterminer si $d_{\mathcal{M}}$ induit une norme dans $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$; il suffit de chercher si $d_{\mathcal{M}}$ est homogène.

On plonge $\mathcal{M}$ dans $\mathrm{CM}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note $d^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$ la distance de chanfrein définie par $\mathcal{M}$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Par le théorème 4.2, $d^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$ induit une norme dans $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. En appliquant les lemmes 4.3 et 4.5 on obtient le polytope $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$ et les pondérations actives de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{F}$ une facette de $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$, et $\mathcal{S}$ une sous-facette de $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}} = \{\,(\vec{v}_i, w_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\,\}$; on a vu que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est une base du cône d'influence $\widehat{O\mathcal{S}}$ dans $\mathbb{R}^n$, et que tout chemin minimal de O à un point $p \in \widehat{O\mathcal{S}}$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$.

En retournant dans l'espace discret, il suffit de voir si tous les points de $\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}$ sont *atteints* par une combinaison linéaire à coefficients positifs entiers des pondérations de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$. Si oui, alors $d_{\mathcal{M}}$ et $d^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$ ont les mêmes valeurs dans le cône discret $\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}$, donc $d_{\mathcal{M}}$ est homogène et les formules directes de distance (4.29), (4.32) et (4.34) sont valides dans le cône discret ; de plus les déplacements élémentaires définis par (4.33) pour chaque coordonnée sont entiers et constants dans tout le cône discret si les poids de $\mathcal{M}$ sont entiers. On retrouve ici le résultat en 2D de [Thi94d, §3.3.2] et en 3D de [Rem01, §4.2.5].

Les points du cône discret atteints par une combinaison linéaire entière des vecteurs $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ sont tout simplement les points du réseau L dont $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est la base. Donc tous les points du cône $\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}$ sont atteints si et seulement si le réseau L est unimodulaire (voir §2.5.1), autrement dit si $\Delta_{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n} = \pm 1$. On dit qu'une sous-facette est *unimodulaire* si le réseau de sa base est unimodulaire. Nous venons donc de montrer une condition suffisante de norme :

Théorème 4.4 *Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{CM}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}, F)$ un masque de chanfrein. Alors $d_{\mathcal{M}}$ induit une norme dans $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ si pour chaque facette $\mathcal{F}$ de $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$, il existe une triangulation de $\mathcal{F}$ en sous-facettes unimodulaires.*

Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ une facette de $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$. S'il n'existe pas de triangulation de $\mathcal{F}$ en sous-facettes unimodulaires, alors on choisit arbitrairement une triangulation et on considère dans

cette triangulation chaque sous-facette $\mathcal{S}$ qui est non-unimodulaire. Soit L le réseau engendré par la base de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$. Alors $d_{\mathcal{M}}$ est homogène sur les points du réseau L dans $\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}$, mais les points de $\big(\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}\big) \setminus L$ ne sont pas atteints par un chemin minimal à coefficients entiers de $\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$. Ils sont donc atteints (on peut même dire perturbés) par des pondérations de $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$, qui de plus ne sont pas forcément actives au sens défini pour le lemme 4.5. Par construction, $\forall\, p \in \big(\mathbb{Z}^n \cap \widehat{O\mathcal{S}}\big) \setminus L$ on a $d_{\mathcal{M}}(p) \geqslant d^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}(p)$. Si $d_{\mathcal{M}}(p) = d^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}(p)\ \forall\, p$ alors le cône discret est homogène ; sinon il ne l'est pas et $d_{\mathcal{M}}$ n'induit pas une norme. Au final on peut assister à la superposition de plusieurs réseaux ; un tel phénomène est illustré à la figure 4.1.d.

4.3.5 Spectre d'un masque

L'application complète de notre méthode pour déterminer si un masque $\mathcal{M}$ induit une norme peut se révéler non triviale : calcul d'enveloppe convexe en dimension n, recherche d'une triangulation en sous-facettes unimodulaires ; par ailleurs le problème reste ouvert dans le cas où il n'existe pas une telle triangulation. L'intérêt pratique du théorème 4.4 va se révéler au chapitre 5, dans lequel nous proposons des constructions de normes. Nous proposons ici un outil très simple pour tester un masque, qui consiste à calculer l'image par f de tous les chemins minimaux discrets, image que l'on appelle le *spectre* de $\mathcal{M}$:

1. On initialise les points d'une image I à $+\infty$, et on met le centre O de I à 0 ; on calcule DT de I et on obtient l'image de distance DM.
2. On initialise à 0 une troisième image SP qui va contenir le spectre. On choisit un facteur d'échelle Ω suffisament grand pour que le spectre soit bien visible dans SP.
3. On parcourt chaque point p de DM (sauf O) et assigne $SP\big[O + f\big(\overrightarrow{Op}, DM[p]\big) \cdot \Omega\big] = 1$.

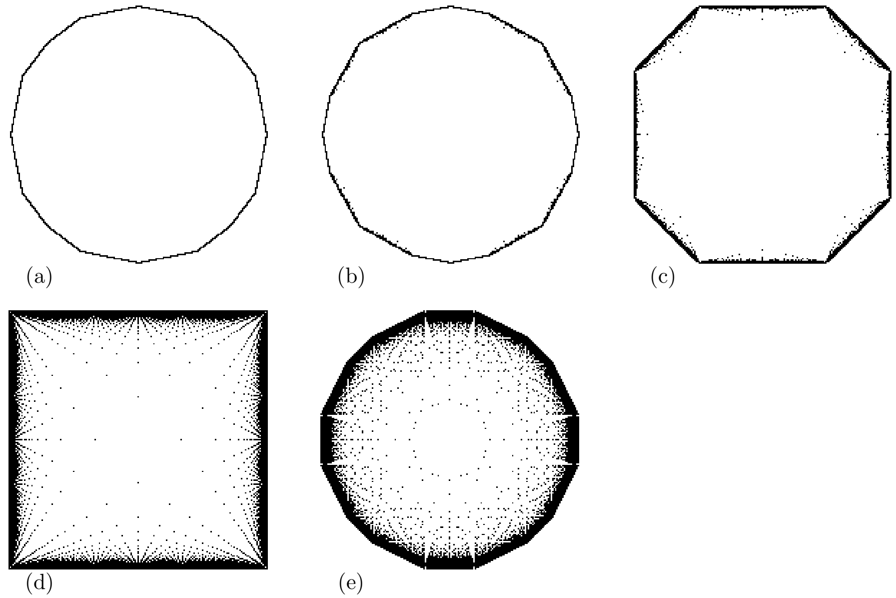


FIG. 4.4 – *Spectre des masques de chanfrein 2D de la figure 4.1 : (a) $\langle 5,7,11\rangle$, (b) $\langle 5,7,\mathsf{d}\,16\rangle$, (c) $\langle 5,7,9\rangle$, (d) $\langle 3,1\rangle$, (e) $\langle 5,7,\mathsf{g}\,8,\mathsf{h}\,8\rangle$. Seul le masque (a) définit une norme.*

Par construction, le spectre de $\mathcal{M}$ est tout simplement une *représentation* de $\mathrm{RSB}_{\mathcal{M}}^{\mathbb{Z}}$, construit avec les valeurs de distances *effectives*. Donc $\mathcal{M}$ définit une norme si et seulement si le spectre est la frontière d'un polytope discret.

On représente figure 4.4 le spectre des masques 2D de la figure 4.1. Seul le spectre de la figure 4.4.a est une frontière de polytope discret, tandis que les autres spectres ont des points intérieurs, qui trahissent les irrégularités.

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude théorique des masques de chanfrein dans un module. Après avoir illustré la variété comportementale des distances de chanfrein, nous avons passé en revue les études préexistantes et montré les fausses routes au §4.1. Nous avons ensuite montré au §4.2 que tout masque de chanfrein induit une distance dans un module, et une norme dans un espace vectoriel.

Nous avons ensuite établi un critère de norme discrète en faisant un aller-retour dans l'espace euclidien au §4.3. Pour ce faire nous avons étudié les ensembles de chemins minimaux dans un espace projectif, montré que ces ensembles sont la frontière du polytope de l'enveloppe convexe de la projection des pondérations, et que les pondérations actives du masque correspondent aux points extrêmes du polytope. De plus nous avons dégagé les structures de cônes d'influence et donné les formules directes de distance et de déplacements élémentaires pour toute norme de chanfrein. Nous avons enfin proposé la notion de spectre d'un masque.

Cette étude précise l'intérêt d'avoir une norme : outre la propriété d'homogénéité (nécessaire dans certaines applications), les boules de la norme sont des polytopes discrets (propriété utile pour le calcul de l'axe médian, cf §6), et les formules directes sont faciles à obtenir. Au contraire pour une distance semi-régulière (au sens de Borgefors) qui n'induit pas de norme (cf §4.1.1), les formules sont beaucoup plus difficiles à obtenir et ne s'obtiennent que au cas par cas.

Nous avons construit toute cette étude sans faire appel aux points visibles, contrairement à nos travaux antérieurs. Nous proposons au chapitre suivant des constructions de normes qui s'appuient sur ces points visibles et leurs propriétés, de façon à respecter le critère de norme discrète du théorème 4.4.

Chapitre 5

Construction de normes

Dans ce chapitre nous complétons la construction théorique faire au chapitre 4 en étudiant les propriétés des masques de chanfrein dans l'espace discret. Ces propriétés s'appuient naturellement sur les points visibles et les suites de Farey, qui sont présentées au §5.1. Ensuite nous proposons une méthode de construction de normes de chanfrein discrètes au §5.2, puis nous montrons comment optimiser des masques de normes au §5.3.

5.1 Points visibles et suites de Farey

Les points visibles possèdent des propriétés de construction et de symétries qui sont étroitements liées aux suites de Farey en 2D et aux ensembles de Farey en dimension supérieure. Nous présentons les ensembles de points visibles au §5.1.1 et les suites de Farey au §5.1.2. Nous étudions ensuite les ensembles de Farey au §5.1.3 et les triangulations de Farey au §5.1.4.

5.1.1 Points visibles

Les pondérations dans un masque de chanfrein sont le plus souvent choisies parmi les points visibles, dans un souci d'efficacité et pour ne pas contredire l'homogénéité.

Définition 5.1 (Point visible) *Un point $P(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$ est dit visible (depuis l'origine sur le réseau fondamental) s'il n'y a aucun point de $\mathbb{Z}^n$ qui soit situé sur la droite réelle (OP) entre O et P. Une condition nécessaire et suffisante est* $\mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_n) = 1$ [Har78, chap. 3].

On note $\mathcal{V}_k^n$ (resp $\mathcal{V}^n$) l'ensemble des points visibles de $\mathbb{Z}_k^n$ (resp. $\mathbb{Z}^n$)

$$\mathcal{V}_k^n = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}_k^n \ : \ \mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_n) = 1 \right\} \tag{5.1}$$

et on appelle *couche k* le sous-ensemble $\mathcal{V}_k^n \setminus \mathcal{V}_{k-1}^n$. On peut obtenir le générateur $\mathrm{G}(\mathcal{V}_k^n)$ avec un crible sur les périodes des points visibles, en faisant un balayage de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}_k^n)$ en $x_1, ..., x_n$:

$$\textbf{for } x_1 = 1 \textbf{ to } k\,,\ \textbf{for } x_2 = 0 \textbf{ to } x_1\,,\ \ldots\,,\ \textbf{for } x_n = 0 \textbf{ to } x_{n-1} \textbf{ do }\ . \tag{5.2}$$

Les points visibles de $\mathrm{G}(\mathcal{V}_k^n)$ sont numérotés v_0, v_1, v_2, ... dans l'ordre lexicographique de leur coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, qui est également l'ordre d'apparition dans le crible. Pour faciliter la lecture, on nomme a, b, c, etc, les premiers points visibles, dans le même ordre. On donne figures 5.1, 5.2 et 5.3, la liste des premiers points visibles dans le générateur de $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$ et $\mathbb{Z}^4$, et une représentation avec le repère de la figure 2.7. Pour $n \geqslant 3$, on représente les points visibles avec la transformation homogène

$$\pi_{x_1}^n \ : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \left(1, \frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right) \tag{5.3}$$

qui est une projection de centre O sur l'hyperplan $x_1 = 1$. Cette projection $\pi_{x_1}^n$ est une injection de $\mathrm{G}(\mathcal{V}^n)$ dans le simplexe $\big((1, 0 \cdots 0), (1, 1, 0 \cdots 0), (1 \cdots 1)\big)$, ce qui isole bien les points visibles dans la représentation.

On remarque que le nombre de points visibles dans une couche de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^2)$ est lié à la fonction ϕ d'Euler [Har78, §5.5]. On définit $\phi(k)$ ($k \in \mathbb{N}_*$) par le nombre d'entiers j tel que $0 < j \leqslant k$ et $\mathrm{pgcd}(j, k) = 1$. En décomposant k en produit de facteurs premiers $k = p_1^{c_1} \mathinner{..} p_m^{c_m}$, on a

$$\phi(k) \ = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (p_i - 1)\, p_i^{c_i - 1}\ . \tag{5.4}$$

Le nombre de points visibles dans une couche $k > 1$ de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^2)$ est $\#\,\mathrm{G}\big(\mathcal{V}_k^2 \setminus \mathcal{V}_{k-1}^2\big) = \phi(k)$. Ce n'est pas vrai pour $k = 1$ car $\phi(1) = 1$ alors que $\#\,\mathrm{G}\big(\mathcal{V}_1^2 \setminus \mathcal{V}_0^2\big) = 2$ (voir figure 5.1).

v_0	a	$(1,0)$	v_{12}	m	$(6,5)$
v_1	b	$(1,1)$	v_{13}	n	$(7,1)$
v_2	c	$(2,1)$	v_{14}	o	$(7,2)$
v_3	d	$(3,1)$	v_{15}	p	$(7,3)$
v_4	e	$(3,2)$	v_{16}	q	$(7,4)$
v_5	f	$(4,1)$	v_{17}	r	$(7,5)$
v_6	g	$(4,3)$	v_{18}	s	$(7,6)$
v_7	h	$(5,1)$	v_{19}	t	$(8,1)$
v_8	i	$(5,2)$	v_{20}	u	$(8,3)$
v_9	j	$(5,3)$	v_{21}	v	$(8,5)$
v_{10}	k	$(5,4)$	v_{22}	w	$(8,7)$
v_{11}	l	$(6,1)$			

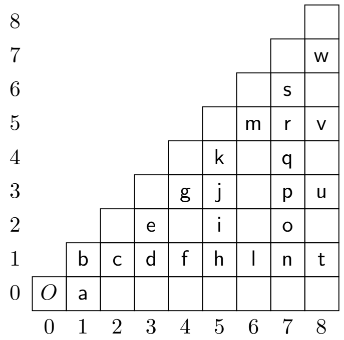


FIG. 5.1 – *Sous-ensemble $\mathrm{G}(\mathcal{V}_8^2)$ des points visibles en 2D : table (numéro, nom, coordonnées) et représentation sur le pavage carré.*

v_0	a	$(1,0,0)$	v_{11}	l	$(3,3,1)$
v_1	b	$(1,1,0)$	v_{12}	m	$(3,3,2)$
v_2	c	$(1,1,1)$	v_{13}	n	$(4,1,0)$
v_3	d	$(2,1,0)$	v_{14}	o	$(4,1,1)$
v_4	e	$(2,1,1)$	v_{15}	p	$(4,2,1)$
v_5	f	$(2,2,1)$	v_{16}	q	$(4,3,0)$
v_6	g	$(3,1,0)$	v_{17}	r	$(4,3,1)$
v_7	h	$(3,1,1)$	v_{18}	s	$(4,3,2)$
v_8	i	$(3,2,0)$	v_{19}	t	$(4,3,3)$
v_9	j	$(3,2,1)$	v_{20}	u	$(4,4,1)$
v_{10}	k	$(3,2,2)$	v_{21}	v	$(4,4,3)$

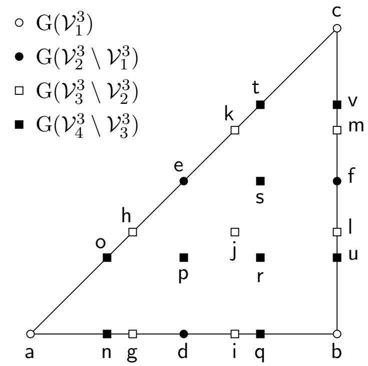


FIG. 5.2 – *Sous-ensemble $\mathrm{G}(\mathcal{V}_4^3)$ des points visibles en 3D : table (numéro, nom, coordonnées) et représentation en projection de centre O sur le triangle* (a, b, c).

Par construction, les points de $\mathrm{G}(\mathcal{V}_1^n)$ forment une base de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$. En écrivant les points de $\mathrm{G}(\mathcal{V}^n)$ dans la base $\mathrm{G}(\mathcal{V}_1^n)$, puis en considérant leurs projetés par $\pi_{x_1}^n$ en coordonnées barycentriques, on assiste à un élégant procédé de construction d'une couche k à partir des couches

v_0	a	$(1,0,0,0)$	v_{13}	n	$(3,2,0,0)$
v_1	b	$(1,1,0,0)$	v_{14}	o	$(3,2,1,0)$
v_2	c	$(1,1,1,0)$	v_{15}	p	$(3,2,1,1)$
v_3	d	$(1,1,1,1)$	v_{16}	q	$(3,2,2,0)$
v_4	e	$(2,1,0,0)$	v_{17}	r	$(3,2,2,1)$
v_5	f	$(2,1,1,0)$	v_{18}	s	$(3,2,2,2)$
v_6	g	$(2,1,1,1)$	v_{19}	t	$(3,3,1,0)$
v_7	h	$(2,2,1,0)$	v_{20}	u	$(3,3,1,1)$
v_8	i	$(2,2,1,1)$	v_{21}	v	$(3,3,2,0)$
v_9	j	$(2,2,2,1)$	v_{22}	w	$(3,3,2,1)$
v_{10}	k	$(3,1,0,0)$	v_{23}	x	$(3,3,2,2)$
v_{11}	l	$(3,1,1,0)$	v_{24}	y	$(3,3,3,1)$
v_{12}	m	$(3,1,1,1)$	v_{25}	z	$(3,3,3,2)$

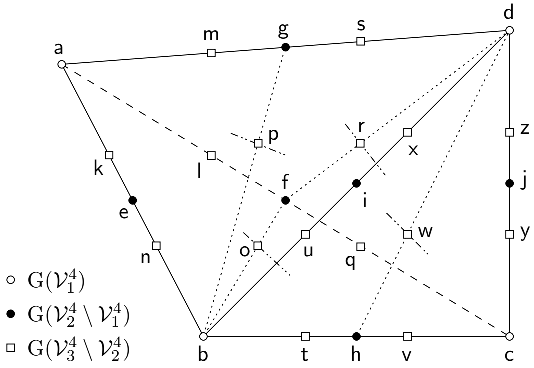


FIG. 5.3 – *Sous-ensemble* $\mathrm{G}(\mathcal{V}_3^4)$ *des points visibles en 4D : table (numéro, nom, coordonnées) et représentation en projection de centre O sur le tétraèdre* (a, b, c, d).

précédentes. Par exemple en dimension $n = 3$, les points visibles de $\mathrm{G}(\mathcal{V}_1^3)$ sont a, b, c, et on peut exprimer tout point $(x, y, z) \in \mathrm{G}(\mathbb{Z}^3)$ par

$$(x, y, z) = (x - y)\,\mathsf{a} + (y - z)\,\mathsf{b} + z\,\mathsf{c}\,. \tag{5.5}$$

On montre $G(\mathcal{V}_3^3)$ dans la figure 5.4 avec la projection π_x^3. On voit dans la couche 2 que les points d, e, f sont situés au milieu de [a, b], [a, c] et [b, c] ; on peut continuer le raisonnement dans la couche 3, où g = a + d, h = a + e, i = d + b, k = e + c, l = b + f, m = f + c, et j = a + f = b + e = c + d. Nous allons voir que ce phénomène est étroitement lié aux propriétés des points médians dans les suites et les ensembles de Farey.

a	$(1,0,0)$	a
b	$(1,1,0)$	b
c	$(1,1,1)$	c
d	$(2,1,0)$	a + b
e	$(2,1,1)$	a + c
f	$(2,2,1)$	b + c

g	$(3,1,0)$	2a + b
h	$(3,1,1)$	2a + c
i	$(3,2,0)$	a + 2b
j	$(3,2,1)$	a+b+c
k	$(3,2,2)$	a + 2c
l	$(3,3,1)$	2b + c
m	$(3,3,2)$	b + 2c

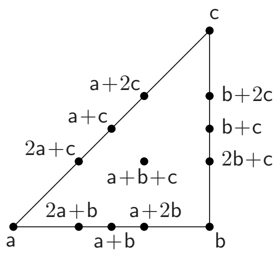


FIG. 5.4 – *Points visibles* $G(\mathcal{V}_3^3)$ *projetés et coordonnées barycentriques (nom, coordonnées cartésiennes, coordonnées barycentriques).*

5.1.2 Suites de Farey

Les suites de Farey ont été découvertes par celui-ci en 1816 puis étudiées par Cauchy. Nous rappelons leur définition et quelques propriétés classiques. On trouve leur démonstration ainsi que d'autres propriétés intéressantes par exemple dans [Har78, chap3] et [Gra98].

Définition 5.2 (Suites de Farey) *Les suites de Farey F_k d'ordre k sont les séries croissantes de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont les dénominateurs n'excèdent pas k. Donc $\frac{y}{x} \in F_k$ si $0 \leq y \leq x \leq k$ et* $\mathrm{pgcd}(y, x) = 1$.

Soit $\frac{y}{x}$ et $\frac{y'}{x'}$ deux termes de F_k, alors on appelle $\frac{y+y'}{x+x'}$ le *point médian* de $\frac{y}{x}$ et $\frac{y'}{x'}$. On a la propriété suivante sur les termes de F_k :

Théorème 5.1 *Si $\frac{y}{x} < \frac{y''}{x''} < \frac{y'}{x'}$ sont trois termes successifs de F_k, alors $\frac{y''}{x''}$ est le médian*

$$\frac{y''}{x''} = \frac{y + y'}{x + x'}\,. \tag{5.6}$$

On en déduit le procédé suivant de construction des suites de Farey. La définition 5.2 donne la première série F_1. Selon (5.6), on obtient F_k connaissant F_{k-1}, en intercalant entre chaque couple successif $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$ de F_{k-1} le nouveau terme $\frac{y+y'}{x+x'}$ si $x + x' \leq k$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
F_1 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{1}\\
F_2 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{1}\\
F_3 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{1}{1}\\
F_4 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{4} < \tfrac{1}{1}\\
F_5 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{5} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{3} < \tfrac{2}{5} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{5} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{4} < \tfrac{4}{5} < \tfrac{1}{1}\\
F_6 &: \tfrac{0}{1} < \tfrac{1}{6} < \tfrac{1}{5} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{3} < \tfrac{2}{5} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{5} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{4} < \tfrac{4}{5} < \tfrac{5}{6} < \tfrac{1}{1}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Les suites de Farey sont reliées aux points visibles par la relation

$$(x, y) \in \mathrm{G}(\mathcal{V}_k^2) \iff \frac{y}{x} \in F_k\,. \tag{5.8}$$

De plus, l'ordre des fractions dans F_k correspond exactement à l'ordre angulaire des points visibles en tournant autour de O dans le sens trigonométrique. Par exemple pour les points de $\mathrm{G}(\mathcal{V}_6^2)$ à la figure 5.1 on a l'ordre angulaire

$$\mathsf{a}\,,\ \mathsf{l}\,,\ \mathsf{h}\,,\ \mathsf{f}\,,\ \mathsf{d}\,,\ \mathsf{i}\,,\ \mathsf{c}\,,\ \mathsf{j}\,,\ \mathsf{e}\,,\ \mathsf{g}\,,\ \mathsf{k}\,,\ \mathsf{m}\,,\ \mathsf{b} \tag{5.9}$$

qui correspond bien à l'ordre des fractions dans F_6. On a enfin le théorème :

Théorème 5.2 *Si $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$ sont deux termes successifs de F_k, alors* $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 1$.

On en déduit que deux points consécutifs dans une suite de Farey sont la base d'un réseau unimodulaire ; ce résultat est étroitement lié au théorème 2.6 de Minkowski (cf §2.5.1).

5.1.3 Ensembles de Farey

L'extension des suites de Farey dans $\mathbb{Q}$ sont les ensembles de Farey dans $\mathbb{Q}^{n-1}$ [Gra92]. Lorsque $n > 2$ on conserve le procédé de construction par points médians, mais on perd l'ordre croissant dans les suites et l'ordre angulaire entre les points visibles. Une utilisation très intéressante des ensembles de Farey est faite dans [Vit00] pour la reconnaissance de plans discrets.

Définition 5.3 (Ensemble de Farey) *Les ensembles de Farey $\widehat{F}_k^n$ d'ordre k sont les ensembles de points irréductibles $\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ de $[0, 1]^{n-1}$ dont le dénominateur x_1 n'excède pas k.*

Donc $\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \in \widehat{F}_k^n$ si $0 \leq x_i \leq x_1 \leq k$ pour $1 < i \leqslant n$, et si $\mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Donc par (5.1) et (2.46) il vient la correspondance avec les points visibles entre $\mathbb{Q}^{n-1}$ et $\mathbb{Z}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{G}(\mathcal{V}_k^n) \iff \left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \in \mathrm{G}(\widehat{F}_k^n)\,. \tag{5.10}$$

L'application faisant correspondre $(x_1, ..., x_n)$ à $\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$ est la projection $\pi^n_{x_1}$ définie par (5.3). La projection $\pi^n_{x_1}$ est une bijection entre $\mathrm{G}(\widehat{F}^n_k)$ et $\mathrm{G}(\mathcal{V}^n_k)$; en effet, $(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{G}(\mathcal{V}^n_k)$ implique que $x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $\mathrm{pgcd}(x_1, ..., x_n) = 1$ et de là $x_1 > 0$, donc l'antécédent de tout $\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right) \in \mathrm{G}(\widehat{F}^n_k)$ est unique dans $\mathrm{G}(\mathcal{V}^n_k)$.

Les ensembles de Farey contiennent des suites de Farey. Par exemple on voit à la figure 5.5 que dans $\pi^3_{x_1}(G(\mathbb{Z}^3))$, les suites sont situées sur les bords $z = 0$, $x = y$ et $y = z$, et sur la demi-diagonale $y + z = x$. Sur le bord $z = 0$ on a $\mathrm{pgcd}(x, y, 0) = \mathrm{pgcd}(x, y) = 1$ et donc les $\left(\frac{y}{x}\right)$ forment une suite de Farey. Il en va de même avec les $\left(\frac{z}{x}\right)$ sur les bords $y = x$ et $z = y$. Enfin sur la demi-diagonale, on a une suite de Farey en 2 parties sur chacune des 2 fractions de $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Dans les autres parties de $\pi^3_{x_1}(G(\mathbb{Z}^3))$, on remarque que les fractions $\left(\frac{y}{x}\right)$ ou $\left(\frac{z}{x}\right)$ ne sont pas automatiquement irréductibles. L'exemple typique pour le montrer est de prendre x, y, z premiers et distincts, et de voir que $\mathrm{pgcd}(xy, yz, zx) = 1$ sans qu'aucun pgcd de deux de ces termes ne soit égal à 1.

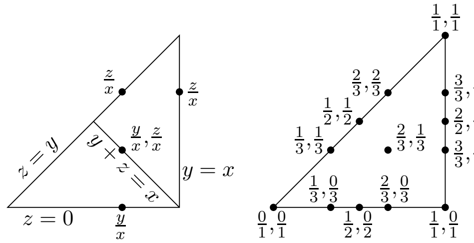


Fig. 5.5 – *Suites de Farey* $F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ *dans l'ensemble* $\mathrm{G}(\widehat{F}^3_3)$.

Pour tout point A de $\mathbb{Z}^n$ on note $\widehat{A} = \pi^n_{x_1}(A)$ le point correspondant de $\mathbb{Q}^{n-1}$. On définit l'opération $\widehat{+}$ dans $\mathbb{Q}^{n-1}$ par

$$\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right) \widehat{+} \left(\frac{x'_2}{x'_1}, ..., \frac{x'_n}{x'_1}\right) = \left(\frac{x_2 + x'_2}{x_1 + x'_1}, ..., \frac{x_n + x'_n}{x_1 + x'_1}\right). \tag{5.11}$$

Étant donné deux points $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de $\mathbb{Q}^{n-1}$, on appelle *point médian* de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ le point $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$. Par (5.11) on voit que $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B}$ correspond à $A + B$ de $\mathbb{Z}^n$, autrement dit

$$\pi^n_{x_1}(A) \mathbin{\widehat{+}} \pi^n_{x_1}(B) \ = \ \pi^n_{x_1}(A + B). \tag{5.12}$$

On remarque que $\mathcal{V}^n$ ne conserve pas l'addition : un contre-exemple est $(1, 0, 0) + (3, 2, 2) = (4, 2, 2) \notin \mathcal{V}^n$. Donc $\widehat{F}$ ne conserve pas l'opération $\widehat{+}$. On peut cependant établir un procédé de construction de $\widehat{F}^n_{k+1}$ à partir de $\widehat{F}^n_k$ et $\widehat{+}$, en faisant appel aux triangles de Farey.

5.1.4 Triangulations de Farey

Considérons un n-uplet $(A_1, ..., A_n)$ de points de $\mathbb{Z}^n$, où $A_i = (x_{i,1}, ..., x_{i,n})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On note $\Delta_{A_1,...,A_n} = \det\bigl(x_{i,j}\bigr) \in \mathbb{Z}$ le volume signé du parallélépipède défini par $(O, A_1, ..., A_n)$. On a vu au §2.5.1 que $(\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n})$ est la base d'un réseau unimodulaire si et seulement si $\Delta_{A_1,...,A_n} = \pm 1$, ou de manière équivalente par le théorème 2.6 de Minkowski que le parallélépipède $(O, A_1, ..., A_n)$ ne contient aucun autre point de $\mathbb{Z}^n$ dans son intérieur.

Définition 5.4 (Triangulation de Farey) *On appelle triangulation de Farey et on note* F^n_k, *l'ensemble de Farey* $\widehat{F}^n_k$ *muni d'une triangulation en simplexes, où chaque simplexe a ses sommets* $(\widehat{A}_1, ..., \widehat{A}_n)$ *dans* $\widehat{F}^n_k$ *tels que* $\Delta_{A_1,...,A_n} = \pm 1$.

Par abus de langage on appelle *triangle* de Farey un simplexe d'une triangulation de Farey. On montre figure 5.6 des triangulations de Farey de $\mathrm{G}(\widehat{F}^3)$.

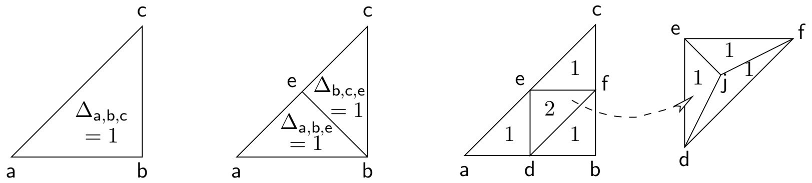


Fig. 5.6 – *Triangulations de Farey (en projection) de* $\mathrm{G}(\widehat{F}^3)$. *Le triplet* $(\mathsf{d}, \mathsf{f}, \mathsf{e})$ *n'est pas un triangle de Farey puisque* $\Delta_{\mathsf{d,f,e}} = 2$ *; de fait le parallélépipède* $(O, \mathsf{d}, \mathsf{f}, \mathsf{e})$ *contient* j.

Dans $\mathbb{Q}$ la triangulation de toute suite de Farey est unique, mais en dimension supérieure les triangulations des ensembles de Farey ne sont en général pas uniques. On dit qu'une séquence de triangulation de Farey est *compatible* si la triangulation de F^n_k est un raffinement de la triangulation de F^n_{k-1}. La figure 5.7 montre des exemples de triangulations compatibles.

Théorème 5.3 (Mönkemeyer) *Soit* $(\widehat{A_1}, ..., \widehat{A_n})$ *un triangle de Farey de* $\widehat{F}^n_k$, *et* $\widehat{P}$ *un point de* $\widehat{F}^n_{k+1}$, *inclus dans le triangle et distinct des sommets ; alors* $\widehat{P}$ *est le médian de 2 des sommets* [Gra92].

On en déduit que ce point $\widehat{P}$ de $\widehat{F}^n_{k+1}$ est obligatoirement situé sur les bords du triangle de Farey de $\widehat{F}^n_k$. Par le théorème 5.3 on a donc un procédé de construction de tout $\widehat{F}^n_{k+1}$ à partir d'une triangulation de Farey F^n_k. Le théorème 5.3 explique aussi la position des points visibles dans les couches et le phénomène observé au §5.1.1 sur les coordonnées barycentriques.

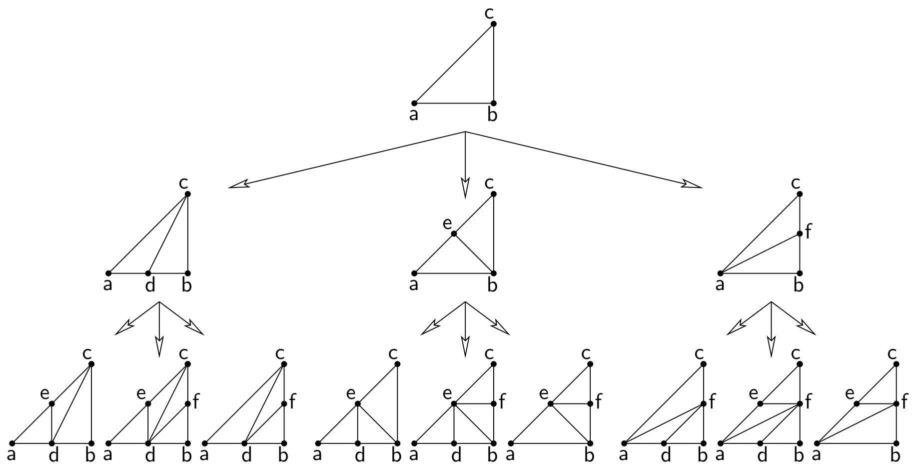


Fig. 5.7 – *Séquences compatibles de triangulations de Farey dans* $\mathrm{G}(\widehat{F}^3_2)$.

5.2 Normes de chanfrein discrètes

5.2.1 Stratégie de construction

Nous proposons une stratégie de construction d'un masque de chanfrein G-symétrique $\mathcal{M}$ pour qu'il définisse une norme dans le module $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, en tirant parti du cadre théorique développé au chapitre 4 et en s'appuyant sur les triangulations de Farey. Le procédé se fait par étapes, et lorsqu'une étape est impossible on revient en arrière et on opère un autre choix.

1. On choisit un ensemble de points visibles p_i de $\mathrm{G}(\mathcal{V}^n)$ contenant au moins une base de $\mathbb{Z}^n$, afin de former les pondérations $(\vec{v}_i, w_i)$ de $\mathcal{M}$. On fixe $\vec{v}_i = \overrightarrow{Op_i}$ pour tout i ; les poids w_i deviennent les inconnues du problème.
2. On choisit une triangulation de Farey F^n des points $\widehat{p_i}$.
3. On calcule les contraintes sur les poids pour que le polyèdre Ω de sommets $O + \frac{\vec{v}_i}{w_i}$ et de facettes organisées selon F^n soit convexe.
4. On cherche un masque avec des poids entiers dans l'espace des contraintes.

Par définition, chaque triangle de Farey définit une base unimodulaire. Donc si une triangulation de $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$ en sous-facettes unimodulaires correspond à la triangulation de Farey F^n, alors $\mathcal{M}$ définit une norme par le théorème 4.4.

Notre procédé vise donc à satisfaire le théorème 4.4 en imposant la triangulation du polytope $\mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$, puis en rajoutant des contraintes sur les poids de telle sorte que $\Omega = \mathrm{RB}^{\mathbb{R}}_{\mathcal{M}}$.

Le théorème 2.3 de Tietze permet d'exprimer la convexité sous une forme locale. On déduit de ce théorème qu'un polyèdre est convexe si et seulement si toutes les paires de facettes adjacentes (par une $(n-2)$-face) sont localement convexes. Nous développons notre méthode en exploitant cette propriété dans la section suivante.

Un autre intérêt de la construction est que lorsque les contraintes sont réalisées, chaque triangle de F^n définit un cône d'influence ; ils sont donc connus d'avance et on peut utiliser les formules directes du §4.3.3. Par exemple, on donne figure 5.8 les déplacements élémentaires dans les cônes d'influence définis par des triangles de Farey de $\mathcal{V}^3_2$, calculés avec (4.33). Les poids affectés aux points visibles a, b, c, ..., sont notés w_a, w_b, w_c, ...

Triangle	dx	dy	dz
$(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	w_a	$w_\mathsf{b}-w_\mathsf{a}$	$w_\mathsf{c}-w_\mathsf{b}$
$(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{e})$	w_a	$w_\mathsf{b}-w_\mathsf{a}$	$w_\mathsf{e}-w_\mathsf{a}-w_\mathsf{b}$
$(\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{e}-w_\mathsf{c}$	$w_\mathsf{b}+w_\mathsf{c}-w_\mathsf{e}$	$w_\mathsf{c}-w_\mathsf{b}$
$(\mathsf{a},\mathsf{d},\mathsf{e})$	w_a	$w_\mathsf{d}-2w_\mathsf{a}$	$w_\mathsf{e}-w_\mathsf{d}$
$(\mathsf{d},\mathsf{b},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{d}-w_\mathsf{b}$	$2w_\mathsf{b}-w_\mathsf{d}$	$w_\mathsf{e}-w_\mathsf{d}$
$(\mathsf{b},\mathsf{f},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{b}+w_\mathsf{e}-w_\mathsf{f}$	$w_\mathsf{f}-w_\mathsf{e}$	$w_\mathsf{f}-2w_\mathsf{b}$
$(\mathsf{f},\mathsf{c},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{e}-w_\mathsf{c}$	$w_\mathsf{f}-w_\mathsf{e}$	$2w_\mathsf{c}-w_\mathsf{f}$

FIG. 5.8 – *Déplacements élémentaires dans des triangles de Farey de $\mathcal{V}^3_2$.*

5.2.2 Critère de convexité locale dans $\mathbb{Z}^3$

Soit P, Q, R, S des points de $\mathbb{Z}^3$. Le volume signé du tétraèdre orienté (P, Q, R, S) est

$$\delta(P,Q,R,S) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_q-x_p & x_r-x_p & x_s-x_p \\ y_q-y_p & y_r-y_p & y_s-y_p \\ z_q-z_p & z_r-z_p & z_s-z_p \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

qui peut également s'écrire sans soustractions

$$\delta(P,Q,R,S) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_q & x_r & x_s & x_p \\ y_q & y_r & y_s & y_p \\ z_q & z_r & z_s & z_p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} . \tag{5.14}$$

Le tétraèdre orienté (P, Q, R, S) est direct si $\delta(P, Q, R, S) > 0$, indirect si $\delta(P, Q, R, S) < 0$, ou plat. Dans la suite, on représente un tétraèdre (P, Q, R, S) direct avec le point P « derrière » le triangle (Q, R, S), dont les sommets sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (voir figure 5.9).

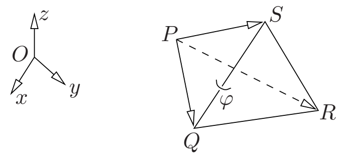


FIG. 5.9 – *Tétraèdre (P, Q, R, S) direct.*

On note $\varphi(P, Q, R, S)$ l'angle entre les triangles orientés (P, Q, S) et (Q, R, S). On dit que ces triangles sont *localement convexes* si $\varphi(P, Q, R, S) \geq 180°$, et on a

$$\varphi(P,Q,R,S) \geqslant 180° \quad\Longleftrightarrow\quad \delta(P,Q,R,S) \geqslant 0 . \tag{5.15}$$

Considérons maintenant 4 pondérations $(\overrightarrow{OP}, w_p)$, $(\overrightarrow{OQ}, w_q)$, $(\overrightarrow{OR}, w_r)$,$(\overrightarrow{OS}, w_s)$ de $\mathcal{M}$, définissant 2 triangles de Farey orientés (P, Q, S) et (Q, R, S). On note $P' = \frac{P}{w_p}$, $Q' = \frac{Q}{w_q}$, $R' = \frac{R}{w_r}$ et $S' = \frac{S}{w_s}$. La condition de convexité locale sur Ω est $\varphi(P', Q', R', S') \geqslant 180°$, et s'écrit $\delta(P', Q', R', S') \geqslant 0$ par (5.15). On a

$$\delta(P',Q',R',S') = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{x_q}{w_q} & \frac{x_r}{w_r} & \frac{x_s}{w_s} & \frac{x_p}{w_p} \\ \frac{y_q}{w_q} & \frac{y_r}{w_r} & \frac{y_s}{w_s} & \frac{y_p}{w_p} \\ \frac{z_q}{w_q} & \frac{z_r}{w_r} & \frac{z_s}{w_s} & \frac{z_p}{w_p} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.16}$$

par (5.14) ; on factorise les $\frac{1}{w_i}$

$$\delta(P',Q',R',S') = \frac{1}{6\,w_p w_q w_r w_s}\begin{vmatrix} x_q & x_r & x_s & x_p \\ y_q & y_r & y_s & y_p \\ z_q & z_r & z_s & z_p \\ w_q & w_r & w_s & w_p \end{vmatrix} ; \tag{5.17}$$

on développe enfin par mineurs de la forme $\Delta_{i,j,k} = \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}$ et on obtient

$$\delta(P',Q',R',S') = \frac{1}{6\,w_p w_q w_r w_s}\left(w_p\Delta_{q,r,s} - w_q\Delta_{r,s,p} + w_r\Delta_{q,s,p} - w_s\Delta_{q,r,p} \right) . \tag{5.18}$$

La condition de convexité locale $\delta(P', Q', R', S') \geq 0$ s'écrit donc par (5.18) :

Théorème 5.4 *Étant donné 2 triangles de Farey orientés (P, Q, S) et (Q, R, S), le critère de convexité locale entre les 2 faces correspondantes sur Ω, noté $\mathrm{CCL}(PQRS)$, est*

$$w_p\Delta_{q,r,s} - w_q\Delta_{r,s,p} + w_r\Delta_{q,s,p} - w_s\Delta_{q,r,p} \geq 0 . \tag{5.19}$$

5.2.3 Exemples de contraintes dans $\mathbb{Z}^3$

Par définition de $G(\mathbb{Z}^3)$, les bords du triangle vus en projection à la figure 2.7.b sont les 3 plans passant par O tels que $z = y$, $z = 0$ et $y = x$, et l'intérieur du triangle est tel que $0 < z < y < x$ (figure 5.10.a). On se donne les symétries σ par rapport aux plans bordant $G(\mathbb{Z}^3)$, illustrées figure 5.10.b:

$$\begin{array}{lcl} \sigma_1 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,z,y) \\ \sigma_2 : (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \\ \sigma_3 : (x,y,z) & \longmapsto & (y,x,z) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \\ \sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sigma_6 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \\ \sigma_7 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \end{array} \tag{5.20}$$

Étant donné un point visible v, on note $v^i = \sigma_i(v)$; par exemple b^2 est $\sigma(\mathsf{b})$.

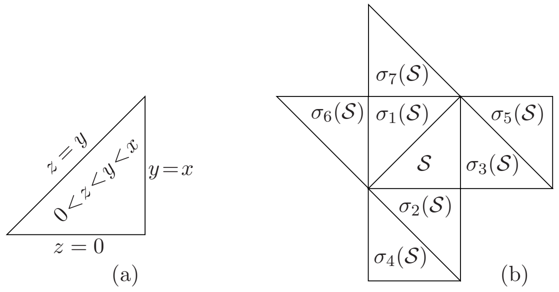


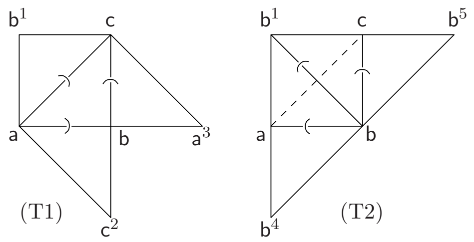
FIG. 5.10 – *Plans délimitant $\mathcal{S} = G(\mathbb{Z}^3)$ (a) et symétries associées (b) en projection.*

Contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c} \rangle$

La triangulation de Farey du masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c} \rangle$ est unique dans $G(\mathbb{Z}^3)$. Pour rendre la boule convexe il suffit de faire respecter le critère de convexité locale CCL du théorème 5.4 entre la face $(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$ et les 3 faces adjacentes, représentées figure 5.11-T1.

Lorsqu'un triangle (q,r,s) est sur la frontière de $G(\mathbb{Z}^3)$, il est adjacent à son symétrique (q,s,r^i) par rapport à la frontière. On remarque que si on change l'arête (q,s) par l'arête (r,r^i) on obtient une autre triangulation, appelée *transverse*, qui est « à cheval » sur $G(\mathbb{Z}^3)$. Dans certains cas elle définit encore une triangulation de Farey ; mais les faces adjacentes ne sont alors plus les mêmes pour le CCL. Ce phénomène est illustré figure 5.11-T2.

On extrait de la figure 5.11 les quadruplets sur lesquels appliquer le CCL ; l'ordre des points est important, de lui dépend le signe (voir §5.2.2). On applique ensuite le théorème 5.4 pour calculer les contraintes sur les poids, et on obtient le tableau de la figure 5.11.



T1	$(\mathsf{a}^3,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$w_\mathsf{b} \leq 2w_\mathsf{a}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$w_\mathsf{a} + w_\mathsf{c} \leq 2w_\mathsf{b}$
	$(\mathsf{c}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$w_\mathsf{b} \leq w_\mathsf{c}$
T2	$(\mathsf{b}^4,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}^1)$	$w_\mathsf{a} \leq w_\mathsf{b}$
	$(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$	$2w_\mathsf{b} \leq w_\mathsf{a} + w_\mathsf{c}$
	$(\mathsf{b}^5,\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{b}^1)$	$2w_\mathsf{c} \leq 3w_\mathsf{b}$

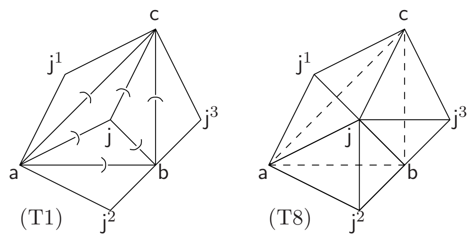
FIG. 5.11 – *Triangulations et contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c} \rangle$.*

Contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j} \rangle$

Le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j} \rangle$ est très intéressant : en effet, la triangulation de Farey du masque est unique dans $G(\mathbb{Z}^3)$ (figure 5.12-T1), mais chacun des trois triangles est frontière ; on a donc le choix entre les arêtes (a,b) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^2)$, (b,c) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^3)$, (c,a) ou $(\mathsf{j},\mathsf{j}^1)$: il y a en tout 8 triangulations différentes (figure 5.12-T8).

On note cependant qu'aucun des triangles $(\mathsf{a},\mathsf{j}^2,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^2,\mathsf{b},\mathsf{j})$, $(\mathsf{b},\mathsf{j}^3,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^3,\mathsf{c},\mathsf{j})$, $(\mathsf{c},\mathsf{j}^1,\mathsf{j})$, $(\mathsf{j}^1,\mathsf{a},\mathsf{j})$ n'est de Farey ; donc aucune de ces triangulation n'est de Farey, et donc la triangulation T1 est bien l'unique triangulation de Farey du masque.

Dans le tableau de la figure 5.12 on applique le théorème 5.4 sur la triangulation T1. On remarque que le CCL sur les arêtes (a,j), (b,j) et (c,j) est exprimé par le seul CCL $(\mathsf{c},\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$. On note enfin que si l'on remplace les 4 poids par leur distance euclidienne, on obtient la triangulation T8, et les contraintes de T1 ne sont pas respectées.



T1	$(\mathsf{j}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$w_\mathsf{a} + 2w_\mathsf{b} \leq w_\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^3,\mathsf{c},\mathsf{j},\mathsf{b})$	$3w_\mathsf{b} + 2w_\mathsf{c} \leq 2w_\mathsf{j}$
	$(\mathsf{j}^1,\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{c})$	$3w_\mathsf{a} + 3w_\mathsf{c} \leq 2w_\mathsf{j}$
	$(\mathsf{c},\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{j})$	$w_\mathsf{j} \leq w_\mathsf{a} + w_\mathsf{b} + w_\mathsf{c}$

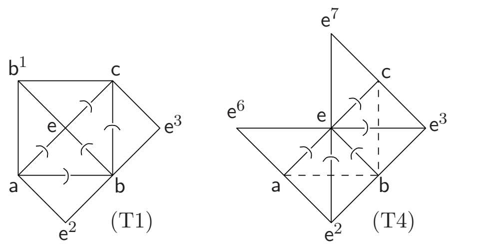
FIG. 5.12 – *Triangulations et contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{j} \rangle$.*

Contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e} \rangle$

Si l'on cherche une meilleur approximation de d_E (voir §5.3), on se rend vite compte que raffiner le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c} \rangle$ avec e est bien plus intéressant qu'en prenant j.

La triangulation T1 du masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e} \rangle$ est unique dans $G(\mathbb{Z}^3)$ (figure 5.13-T1). En considérant les symétries par rapport aux bords, on compte 4 triangulations différentes (par exemple figure 5.13-T4); mais seule T1 est une triangulation de Farey.

On applique le théorème 5.4 sur la triangulation T1 et on obtient le tableau de la figure 5.13. On remarque que les CCL sur les arêtes (a,e) et (e,c) donnent la même inégalité.



T1	$(\mathsf{e}^2,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{a} + w_\mathsf{b} \leq w_\mathsf{e}$
	$(\mathsf{e}^3,\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{b} + 2w_\mathsf{c} \leq 2w_\mathsf{e}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{e})$	$w_\mathsf{e} \leq 2w_\mathsf{b}$
	$(\mathsf{b}^1,\mathsf{e},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$w_\mathsf{e} \leq 2w_\mathsf{b}$
	$(\mathsf{a},\mathsf{e},\mathsf{b},\mathsf{c})$	$w_\mathsf{e} \leq w_\mathsf{a} + w_\mathsf{c}$

FIG. 5.13 – *Triangulations et contraintes pour le masque $\langle \mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e} \rangle$.*

5.2.4 Développements

Les exemples que nous avons présentés montrent l'intérêt de notre approche. Remy étudie par cette méthode de plus grands masques dans [Rem01] et calcule les contraintes correspondantes.

Il observe que les masques transverses peuvent générer des chemins minimaux de O à un point de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^3)$ qui sont en zigzag et « sortent » du cône $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^3)$, et que les algorithmes des figures 6.5, 6.9 et 6.11 peuvent alors être pris en défaut si on ne leur fournit que le générateur $\mathcal{M}^g$. Pour palier à ce problème il définit le masque *complété* $\mathcal{M}^{\triangle}$, qui contient les pondérations de $\mathcal{M}^g$ plus les pondérations situés sur les triangles transverses.

Il observe également que dans les grands masques, les triangulations de Farey ont tendance à produire des triangles assez allongés, ce qui peut nuire ensuite à une bonne approximation de d_E. Il propose une méthode dite de *surcharge de masque* qui lui permet de travailler sur des triangulations non de Farey. De là il calcule les contraintes CCL puis cherche dans chaque triangle les points non atteints, et rajoute les pondérations correspondantes dans le masque de telle sorte que les points initialement manquants prennent les valeurs qui assurent l'homogénéité.

5.3 Optimisation

Nous montrons comment optimiser des masques à partir des contraintes de norme sur quelques exemples publiés dans [Thi00b] ; une étude complète est effectuée dans [Rem01] sur des masques de différentes tailles, avec une triangulation de Farey ou par masques surchargés.

5.3.1 Optimisation et facteur d'échelle

L'un des attraits des distances de chanfrein est la possibilité d'approximer autant que souhaité la distance euclidienne d_E. On choisit dans un premier temps un masque de pondérations, qui va déterminer la charge de calcul, mais aussi limiter l'approximation ; une fois le masque fixé, on calcule les poids de façon à optimiser un critère. D'autres impératifs sont à considérer : on a intérêt par exemple à choisir des poids petits, pour pouvoir stocker des images de distance d'objets plus grands ; on limite donc à 255 le poids de a.

L'erreur commise par rapport à d_E est calculée en rapportant $d_{\mathcal{M}}$ à un facteur d'échelle ε ; cette erreur est donc $\frac{1}{\varepsilon}d_{\mathcal{M}} - d_E$. En général on prend $\varepsilon = w_{\mathsf{a}}$, car ce principe permet une définition cohérente des intervalles de niveaux sur une image de distance ; mais on peut aussi choisir une valeur réelle pour approcher plus finement d_E. L'erreur commise doit être normalisée par d_E pour préserver l'isotropie de la mesure. En fin de compte on optimise l'erreur relative

$$H = \frac{\frac{1}{\varepsilon}d_{\mathcal{M}} - d_E}{d_E} \tag{5.21}$$

en tout point de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^3)$. On peut calculer $d_{\mathcal{M}}$ en tout point à partir de la connaissance des cônes d'influence et de leurs déplacements élémentaires. Il est beaucoup plus simple de générer DT^g (voir figure 6.11) et de calculer l'erreur relative H sur une portion suffisante de DT^g. On obtient ainsi l'erreur relative minimale τ_{min} et maximale τ_{max}. Le taux d'erreur est $\tau_{\mathsf{a}} = \max(|\tau_{min}|, |\tau_{max}|)$.

Le facteur d'échelle réel qui permet de ramener l'erreur à la moitié de l'amplitude $|\tau_{max} - \tau_{min}|$ est noté ε_{opt}. On montre dans [Thi94d, §4.3.2] qu'on peut toujours se ramener à ε_{opt} par

$$\varepsilon_{opt} = w_{\mathsf{a}} \left(\frac{\tau_{min} + \tau_{max}}{2} + 1 \right) \tag{5.22}$$

et que le taux d'erreur τ_{opt} correspondant est

$$\tau_{opt} = \frac{w_{\mathsf{a}}}{\varepsilon_{opt}} (\tau_{max} + 1) - 1 \,. \tag{5.23}$$

Les critères d'optimisation les plus employés dans la littérature portent sur τ_{a} et τ_{opt}.

5.3.2 Exemples d'optimisation dans $\mathbb{Z}^3$

Optimisation du masque $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$

Les contraintes calculées à la figure 5.11 sur les 2 triangulations possibles sont équivalentes à

$$\begin{array}{lll} \text{T1 :} & w_{\mathsf{a}} \le w_{\mathsf{b}} \le 2w_{\mathsf{a}} \,, & w_{\mathsf{b}} \le w_{\mathsf{c}} \le 2w_{\mathsf{b}} - w_{\mathsf{a}} \,; \\ \text{T2 :} & w_{\mathsf{a}} \le w_{\mathsf{b}} \le 2w_{\mathsf{a}} \,, & 2w_{\mathsf{b}} - w_{\mathsf{a}} \le w_{\mathsf{c}} \le \frac{3}{2}w_{\mathsf{b}} \,. \end{array} \tag{5.24}$$

On peut donc générer *tous* les masques possibles avec les boucles

$$\textbf{for } w_{\mathsf{a}} = 1 \textbf{ to } 255 \,, \textbf{ for } w_{\mathsf{b}} = w_{\mathsf{a}} \textbf{ to } 2w_{\mathsf{a}} \,, \textbf{ for } w_{\mathsf{c}} = w_{\mathsf{b}} \textbf{ to } \frac{3}{2}w_{\mathsf{b}} \textbf{ do} \tag{5.25}$$

ce qui fait 4 218 943 masques différents. L'optimisation consiste à générer chaque masque, calculer pour chacun les taux d'erreurs et retenir chaque nouveau masque qui fait mieux que les précédents. On représente figure 5.14 le résultat de l'optimisation du critère τ_{a}, et figure 5.15 celui du critère τ_{opt}. Dans la $4^{ème}$ colonne on indique la triangulation du masque d'après (5.24) ; un = signale lorsque $\mathsf{c} = 2\mathsf{b} - \mathsf{a}$, i.e lorsque les faces $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ et $(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b}^1)$ sont coplanaires.

Il est intéressant de noter que les meilleurs taux sont presque atteints par des a de l'ordre de 20, et qu'au delà ils sont relativement peu améliorés, voire plus du tout. On constate également que le critère τ_{a} a tendance à centrer l'intervalle d'erreur $\tau_{min} \ldots \tau_{max}$ autour de 0, tandis que le critère τ_{opt} a tendance à ramener τ_{min} à 0.

w_{a}	w_{b}	w_{c}	T	τ_{min}	τ_{max}	τ_{a}	τ_{opt}	ε_{opt}
1	1	1	=	−42.26497	0.00000	42.26497	26.79492	0.78868
1	2	2	1	0.00000	41.42136	41.42136	17.15729	1.20711
2	2	3	2	−29.28932	6.06602	29.28932	20.00000	1.76777
2	3	3	1	−13.39746	11.80340	13.39746	12.70167	1.98406
3	4	5	=	−5.71910	10.55416	10.55416	7.94457	3.07253
5	7	8	1	−7.62396	9.54451	9.54451	8.50259	5.04801
7	9	11	=	−9.27353	7.85478	9.27353	8.62534	6.95034
10	13	16	=	−8.07612	8.62780	8.62780	8.32899	10.02758
12	16	19	1	−8.58621	8.33333	8.58621	8.47048	11.98483
17	22	27	=	−8.49206	8.30560	8.49206	8.40667	16.98415
22	29	35	1	−8.14882	8.42194	8.42194	8.27408	22.03004
29	38	46	1	−8.42030	8.26934	8.42030	8.35112	28.97811
34	45	54	1	−8.30319	8.38289	8.38289	8.33972	34.01355
39	51	62	1	−8.21611	8.34656	8.34656	8.27594	39.02544
51	67	81	1	−8.30319	8.33517	8.33517	8.31785	51.00815
56	73	89	1	−8.24255	8.33413	8.33413	8.28454	56.02564
68	89	108	1	−8.30319	8.31131	8.31131	8.30691	68.00276
85	111	135	1	−8.30319	8.30560	8.30560	8.30430	85.00102

FIG. 5.14 – *Masques $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$ optimaux pour le critère τ_{a} en %.*

w_a	w_b	w_c	T	τ_{min}	τ_{max}	τ_a	τ_{opt}	ε_{opt}
1	1	1	=	−42.26497	0.00000	42.26497	26.79492	0.78868
1	2	2	1	0.00000	41.42136	41.42136	17.15729	1.20711
2	3	3	1	−13.39746	11.80340	13.39746	12.70167	1.98406
2	3	4	=	0.00000	22.47449	22.47449	10.10205	2.22474
3	4	5	=	−5.71910	10.55416	10.55416	7.94457	3.07253
4	6	7	1	0.00000	14.56439	14.56439	6.78789	4.29129
7	10	12	1	−1.02567	12.48583	12.48583	6.38962	7.40111
11	16	19	1	−0.27586	13.18091	13.18091	6.32055	11.70978
12	17	21	1	0.00000	13.34559	13.34559	6.25538	12.80074
19	27	33	1	0.00000	13.00479	13.00479	6.10540	20.23546
26	37	45	1	−0.07399	12.85394	12.85394	6.07573	27.66139
41	58	71	1	−0.01983	12.80151	12.80151	6.02559	43.62024
183	259	317	1	0.00000	12.82262	12.82262	6.02503	194.73270
198	280	343	1	−0.00510	12.81414	12.81414	6.02382	210.68094
224	317	388	1	0.00000	12.81876	12.81876	6.02332	238.35701
239	338	414	1	0.00000	12.81197	12.81197	6.02032	254.31030

FIG. 5.15 – *Masques* $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$ *optimaux pour le critère* τ_{opt} *en* %.

Optimisation du masque $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{j} \rangle$

Les contraintes de la figure 5.12 sur la triangulation de Farey unique T1 sont équivalentes à

$$\text{T1}: \quad w_\mathsf{a} \le w_\mathsf{b} \le 2w_\mathsf{a}\ , \quad w_\mathsf{b} \le w_\mathsf{c} \le 2w_\mathsf{b} - w_\mathsf{a}\ ,$$
$$\max(w_\mathsf{a} + 2w_\mathsf{b}, \tfrac{3w_\mathsf{b}+2w_\mathsf{c}+1}{2}, \tfrac{3w_\mathsf{a}+3w_\mathsf{c}+1}{2}) \le w_\mathsf{j} \le w_\mathsf{a} + w_\mathsf{b} + w_\mathsf{c}\ . \tag{5.26}$$

On peut générer tous les masques en énumérant les solutions comme dans (5.25) mais avec les bornes (5.26). En raison du nombre élevé de masques on restreint w_a à 200. Le résultat de l'optimisation avec le critère τ_{opt} est donné figure 5.16. Dans le tableau on occulte les masques où $w_\mathsf{j} = w_\mathsf{a} + w_\mathsf{b} + w_\mathsf{c}$, qui sont en fait des masques $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$.

w_a	w_b	w_c	w_j	τ_{min}	τ_{max}	τ_a	τ_{opt}	ε_{opt}
8	12	14	33	0.00000	13.19231	13.19231	6.18799	8.52769
11	16	19	45	−0.27586	12.44834	12.44834	5.99710	11.66949
15	22	26	62	0.00000	12.74356	12.74356	5.99011	15.95577
26	37	45	107	−0.07399	12.58660	12.58660	5.95757	27.62664
30	43	52	123	0.00000	12.64475	12.64475	5.94642	31.89671
41	58	71	168	−0.01983	12.59174	12.59174	5.93285	43.57724
56	80	97	230	0.00000	12.60586	12.60586	5.92921	59.52964
153	217	265	627	−0.00142	12.60205	12.60205	5.92824	162.63948

FIG. 5.16 – *Masques* $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{j} \rangle$ *optimaux pour le critère* τ_{opt} *en* %.

Optimisation du masque $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle$

La plus grande erreur commise relativement à d_E est atteinte par un point situé sur le plan $(O, \mathsf{a}, \mathsf{c})$; c'est pourquoi il est plus intéressant de raffiner $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$ avec e, qui est le médian de a

et c, plutôt qu'avec j. En effet, le tableau de la figure 5.17 montre un meilleur τ_{opt} (autour de 4 %, contre 6%). Les contraintes de la figure 5.13 pour la triangulation de Farey unique T1 sont équivalentes à

$$\text{T1}: \quad w_\mathsf{a} \le w_\mathsf{b} \le 2w_\mathsf{a}\ , \quad w_\mathsf{b} \le w_\mathsf{c} \le \tfrac{3}{2}w_\mathsf{b}\ ,$$
$$\max(w_\mathsf{a} + w_\mathsf{b}, \tfrac{w_\mathsf{b}+2w_\mathsf{c}+1}{2}) \le w_\mathsf{e} \le \min(w_\mathsf{a} + w_\mathsf{c}, 2w_\mathsf{b})\ . \tag{5.27}$$

w_a	w_b	w_c	w_e	τ_{min}	τ_{max}	τ_a	τ_{opt}	ε_{opt}
3	4	5	7	−5.71910	5.40926	5.71910	5.57281	2.99535
5	7	9	13	−1.00505	9.54451	9.54451	5.05878	5.21349
7	10	12	17	−1.02567	8.79676	8.79676	4.72752	7.27199
7	10	13	18	0.00000	9.73065	9.73065	4.63960	7.34057
10	14	18	25	−1.00505	8.16654	8.16654	4.42727	10.35807
12	17	21	30	0.00000	8.65337	8.65337	4.14725	12.51920
17	24	30	42	−0.17316	8.30560	8.30560	4.07373	17.69126
24	34	42	59	0.00000	8.40723	8.40723	4.03404	25.00887
41	58	71	101	−0.01983	8.36292	8.36292	4.02353	42.71033
41	58	72	101	0.00000	8.36292	8.36292	4.01363	42.71440
53	75	92	130	0.00000	8.32724	8.32724	3.99719	55.20672
58	82	101	142	−0.04956	8.26104	8.26104	3.99142	60.38133
82	116	143	201	0.00000	8.30383	8.30383	3.98640	85.40457
111	157	193	272	0.00000	8.29265	8.29265	3.98125	115.60242
140	198	243	343	0.00000	8.28610	8.28610	3.97823	145.80027
169	239	293	414	−0.00088	8.28180	8.28180	3.97669	175.99738

FIG. 5.17 – *Masques* $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle$ *optimaux pour le critère* τ_{opt} *en* %.

5.3.3 Vues 3D

Nous montrons figure 5.18 des boules de chanfrein pour différents masques. La sphère (a) est la boule $B_{\langle 3,4,5 \rangle}(54)$, dont les facettes $(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ et $(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b}^1)$ sont coplanaires. La sphère (b) est la boule $B_{\langle 19,27,33 \rangle}(342)$, qui est une triangulation T1 de la figure 5.11, et atteint un des meilleurs τ_{opt} de la figure 5.15.

La sphère (c) est la boule $B_{\langle 11,16,19,\mathsf{j}\,45 \rangle}(198)$; elle illustre la triangulation T1 de la figure 5.12, et produit l'un des meilleurs τ_{opt} pour le masque $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{j} \rangle$, avec $\tau_{opt} = 5.99710\,\%$. La pondération j engendre une triangulation plus fine (et esthétique) de la sphère, mais n'améliore pas sensiblement le taux d'erreur en comparaison avec $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$.

La sphère (d) est la boule $B_{\langle 7,10,13,\mathsf{e}\,18 \rangle}(189)$, avec $\tau_{opt} = 4.6396\%$. Elle illustre une stratégie possible pour améliorer l'approximation tout en limitant le temps de calcul lié au nombre de pondérations du masque : il s'agit de choisir un raffinement du masque en insérant un point médian qui soit proche de la direction de l'erreur maximale relativement à d_E. De la sorte, après avoir ajouté e à $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$, la prochaine étape est de rajouter d, ce qui donne un masque $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e} \rangle$.

Expérimentalement, les tableaux montrent que les taux d'erreurs calculés convergent vers les taux optimaux théoriques de Verwer [Ver91b], mais en garantissant que les masques produits définissent bien une norme. On remarque que la convergence est suffisamment rapide pour qu'il soit suffisant de limiter w_a à de petites valeurs.

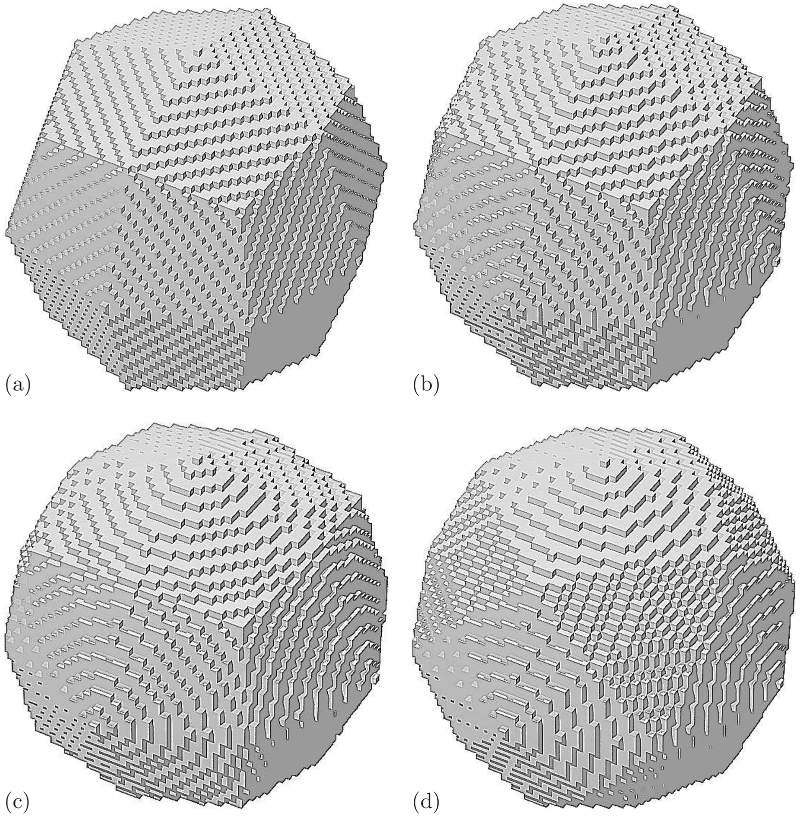


FIG. 5.18 – *Sphères de chanfrein : (a)* $B_{\langle 3,4,5\rangle}$ *(b)* $B_{\langle 19,27,33\rangle}$ *(c)* $B_{\langle 11,16,19,\mathrm{j}\,45\rangle}$ *(d)* $B_{\langle 7,10,13,\mathrm{e}\,18\rangle}$

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les ensembles de points visibles en dimension n et affiché les premiers points visibles en dimensions 2, 3 et 4. Après avoir rappelé les propriétés classiques des suites de Farey et de leur généralisation en ensembles de Farey, nous avons étudié les triangulations de Farey compatibles.

Nous avons ensuite proposé une méthode de construction de masques induisant une norme, en s'appuyant sur le cadre théorique du chapitre 4 et en exploitant les triangulations de Farey. Nous avons plus particulièrement développé cette technique dans $\mathbb{Z}^3$ en établissant un système de contraintes de convexité locale (CCL) entre les facettes, qui se traduisent en contraintes sur les pondérations. Des études de cas ont servi à expliquer la mise en œuvre des CCL et ont montré la notion de triangulation transverse et de masque complété.

On souligne le fait que la méthode des CCL valide les systèmes de contraintes en 2D obtenus précédemment dans [Thi94d, chap. 3], mais cette fois avec une base théorique plus solide.

Nous avons également mentionné une technique alternative de construction de masques développée par Remy, qui permet de construire une norme sans s'appuyer sur une triangulation

de Farey, mais en surchargeant le masque avec les points non atteints. L'inconvénient de cette méthode est le nombre relativement élevé de pondérations dans un tel masque.

Enfin nous avons montré comment optimiser des masques de normes par rapport à plusieurs critères d'erreur relative à d_E, en énumérant l'espace des solutions définies par les systèmes de contraintes CCL, et nous avons fourni des masques de normes optimaux. Une vaste étude sur de plus grands masques est réalisée dans [Rem01] sur ce principe.

Chapitre 6

Axe médian

L'axe médian est un concept faisant intervenir le recouvrement d'une forme par des boules, de manière à accéder à une représentation synthétique d'une forme. Le calcul de l'axe médian est traité dans la littérature, mais seulement pour des cas simples des distances de chanfrein. Le principe général consiste à faire des tests locaux en utilisant des tables de correspondance. Nous donnons dans ce chapitre un algorithme efficace qui calcule les tables de correspondance et aussi le voisinage de test, pour toute norme de chanfrein en dimension n.

Nous rappelons les définitions utiles au §6.1, puis nous passons en revue les méthodes existantes dans §6.2. Nous développons et justifions notre méthode au §6.3 et l'illustrons par des exemples au §6.4. Enfin nous proposons au §6.5 une adaptation de notre méthode à d_E^2.

6.1 Définitions

La description de formes nécessite des méthodes pour extraire les caractéristiques importantes des objets présents dans une image. Un objet binaire est un ensemble de points qui, pris séparément, ne donnent pas d'information pertinente. C'est pourquoi les objets sont fréquemment représentés par leur contour. Une alternative intéressante consiste à rechercher un « axe de symétrie généralisé » dans la forme. Cet ancêtre du squelette fut introduit dans l'espace continu en 1964 par Blum, qui le baptisa « axe médian » [Blu67]. Par la suite, Pfaltz et Rosenfeld [Pfa67] ont défini l'axe médian dans l'espace discret en termes de *boules maximales* dans une forme (appelées « voisinages maximaux »). Ils ont montré que l'union des boules maximales dans une forme $\mathcal{F}$ est une couverture de $\mathcal{F}$. Les boules considérées étaient celles de d_4 et d_8 (des losanges et carrés). Nous redonnons leur définition :

Définition 6.1 (Boule maximale) *Une boule est dite maximale dans une forme si elle n'est incluse dans aucune autre boule incluse dans la forme.*

La définition de boule maximale peut être étendue pour toute famille $\mathcal{B}$ de boules définies par un rayon et un centre, telles que tout centre est inclus dans sa boule et que la boule de rayon 0 est égale à son centre. Un recouvrement de $\mathcal{F}$ par les boules de $\mathcal{B}$ est complètement défini par les positions des centres des boules et leurs rayons respectifs ; ces informations sont suffisantes pour reconstruire $\mathcal{F}$. Par exemple, Jenq et Sahni [Jen92] ont développé des algorithmes séquentiels et parallèles pour calculer les centres des boules maximales sur une famille de boules rectangulaires ; de là, certaines propriétés géométriques sont extraites dans [Wu86] [Cor89]. La notion de boule maximale est spécialement intéressante si $\mathcal{B}$ est une famille de boules de distance, pour leurs propriétés et la possibilité de détection sur une image de distance.

Définition 6.2 (Axe médian) *L'axe médian (noté MA) d'une forme est l'ensemble des centres (et des rayons) des boules maximales incluses dans la forme.*

L'aspect final de l'axe médian et son calcul dépendent de la géométrie de la famille de boules choisie (disques, sphères, polygones, etc). La figure 6.1 montre schématiquement le recouvrement d'une forme 2D par des disques, et l'axe médian obtenu (en pointillés).

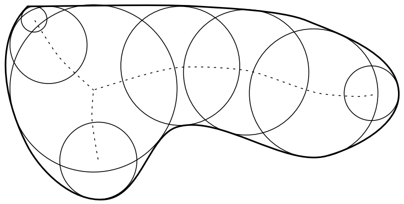


FIG. 6.1 – *Axe médian avec des cercles.*

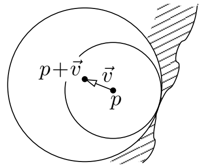


FIG. 6.2 – *Boules à l'intérieur d'une forme.*

Une boule maximale peut être incluse dans l'union de plusieures autres boules maximales ; c'est pourquoi le recouvrement par boules maximales, qui est unique par construction, n'est pas forcément minimal. La minimisation du cardinal de MA tout en conservant la réversibilité peut être intéressant pour la compression. Ainsi Davies et Plummer [Dav80] ont étudié un algorithme itératif avec d_6 sur la grille hexagonale. Plus récemment, Nilsson et Danielsson [Nil97] ont présenté un algorithme pour d_E en 2D, avec une table de relations de recouvrements entre disques à partir de leur bord. Borgefors et Nyström [Bor97] ont décrit une méthode comparable pour d_E en 2D, et pour les distances de chanfrein en 2D et 3D.

Sanniti di Baja et Svensson [San00] ont introduit la notion de boule géodésique maximale dans une surface. Ils présentent une transformation de distance pour une surface dans un volume, qui est utilisée pour identifier l'ensemble des centres des boules géodésiques maximales, en utilisant le critère de maximum local. La méthode est développée pour les distances 3D d_6, d_{26} et $d_{\langle 3,4,5\rangle}$.

L'axe médian est un codage réversible de la forme et une représentation globale ; il est centré dans la forme, et permet de faire de la description, de l'analyse, de la simplification ou de la compression de forme. L'axe médian est rarement fin et ses points sont souvent déconnectés, mais après un traitement approprié, il permet en particulier le calcul du squelette [Thi94d] [Thi96] ou la reconstruction par surfaces implicites [Mar00].

Avant de passer en revue les méthodes existantes, nous introduisons la notion de boule inverse sur une image de distance, à rapprocher de la définition 2.2 d'une boule de distance :

Définition 6.3 (Boule inverse) *Soit (d, E, F) une distance, $p \in E$ et $r \in F$. On appelle boule inverse B_d^{-1} de centre p et de rayon r l'ensemble*

$$B_d^{-1}(p, r) = \left\{\, q \in E \;:\; r - d(p, q) > 0 \,\right\}. \tag{6.1}$$

6.2 Méthodes existantes pour calculer MA

6.2.1 Maxima locaux

Après la transformation de distance, chaque point p est étiqueté à sa distance $DT[p]$ au complémentaire ; $DT[p]$ est aussi le rayon de la plus grande boule dans la forme qui soit centrée en p, qui est par définition de DT et par (6.1), la boule inverse $B_d^{-1}(p, DT[p])$.

Soit $(\vec{v}, w)$ une pondération du masque de chanfrein $\mathcal{M}_C$. Le point $p+\vec{v}$ est plus profondément à l'intérieur de la forme que p si $DT[p+\vec{v}] > DT[p]$ (cf. figure 6.2). D'après la définition des distances de chanfrein, la plus grande valeur possible pour $DT[p+\vec{v}]$ est $DT[p] + w$, c'est-à-dire quand le point p a propagé l'information de distance locale au point $p + \vec{v}$ durant la transformation de distance. On en déduit que la boule centrée en $p+\vec{v}$ recouvre entièrement la boule centrée en p (cf. figure 6.2), et donc que $p \notin$ MA.

Au contraire, si p ne propage aucune pondération, alors p est appelé un *maximum local* et vérifie le critère

$$\text{LMC:} \qquad \forall(\vec{v}, w) \in \mathcal{M}_C\ , \quad DT[p+\vec{v}] < DT[p] + w\ , \tag{6.2}$$

que l'on appelle Critère de Maximum Local (noté LMC). L'ensemble des points détectés par le LMC inclut par construction les points de MA. Rosenfeld et Pfaltz ont montré dans [Ros66] que pour les distances basiques telles que $W(\mathsf{a}) = 1$ (d_4 et d_8 en 2D, d_6, d_{18} et d_{26} en 3D), l'ensemble des points vérifiant le LMC est *exactement* l'axe médian.

Le critère de maximum local n'est malheureusement plus correct dès que $W(\mathsf{a}) > 1$, car le LMC détecte les points de l'axe médian *plus* des points qui ne sont pas centres de boules maximales. L'ensemble des points qui vérifient le LMC est réversible, mais les points détectés par erreur sont en général nombreux, particulièrement près du bord de la forme, et ils rendent cet ensemble inutilisable pour la plupart des applications. Ces points supplémentaires sont détectés à cause de l'existence des *boules équivalentes*.

6.2.2 Boules équivalentes

Deux boules de rayon r et r' sont *équivalentes* si les ensembles de points $B_d(O, r)$ et $B_d(O, r')$ sont identiques (même si les valeurs des points sur la DT sont en général différentes). La *classe d'équivalence* d'une boule est l'intervalle de rayons pour lesquels les boules sont équivalentes. Le *conducteur* χ est le plus petit rayon pour lequel le cardinal de toutes les classes d'équivalence est 1, c'est-à-dire le rayon à partir duquel toutes les boules sont différentes. Le calcul du conducteur χ est lié au problème de Frobenius (voir [Syl84] et [Huj87]). Il est clair que si $W(\mathsf{a}) = 1$ alors on a $\chi = 1$. Inversement, la classe d'équivalence de la boule inverse d'un pixel est $[1 \mathinner{..} W(\mathsf{a})]$, et donc $\chi \geqslant W(\mathsf{a})$ (des boules équivalentes apparaissent dès que $W(\mathsf{a}) > 1$).

Le LMC teste dans (6.2) la différence entre des rayons de boules. Or, ce test est perturbé par l'apparition de classes d'équivalence, donc le LMC est incorrect si un des rayons au moins est inférieur ou égal à χ, ce qui arrive sur la DT dès que $W(\mathsf{a}) > 1$.

Arcelli et Sanniti di Baja [Arc88] ont montré en 2D et pour des masques de taille 3, que le LMC est exact si on abaisse chaque valeur de DT au plus petit représentant de sa classe d'équivalence. Par exemple pour $d_{\langle 3,4\rangle}$, il suffit de descendre les 3 à 1 et les 6 à 5. Leur méthode est malheureusement inappropriée pour des masques de taille supérieure à 3 en 2D ou 3D, à cause de l'apparition des cônes d'influence dans les boules de chanfrein (cf. [Bor93] et [Thi94d]). Nacken a montré dans [Nac94] comment calculer l'axe médian avec la distance 2D $d_{\langle 5,7,11\rangle}$ en ayant recours à la morphologie mathématique, mais son approche est plutôt complexe et ne semble pas facilement extensible à de plus grands masques ni à de plus grandes dimensions. Arcelli et Frucci utilisent dans [Arc92] un axe médian 2D calculé avec $d_{\langle 5,7,11\rangle}$, mais ils ne détaillent pas la méthode utilisée pour l'obtenir.

6.2.3 Tables de correspondances *Lut*

La solution la plus générale et la plus efficace est la méthode des *tables de correspondance* (Look-Up Tables, ou LUT), qui mémorisent les corrections apportées au critère LMC.

Un point p dans une forme est un point de l'axe médian s'il n'existe aucun point q tel que la boule $B_d(q, DT[q])$ recouvre entièrement la boule $B_d(p, DT[p])$: on dit que la présence de q *interdit* à p de faire partie de l'axe médian. Supposons que (i) il est suffisant de chercher q dans un voisinage local de p et (ii) que l'on connaisse pour toute valeur de rayon $DT[p]$ la valeur minimale de rayon $DT[q]$, stockée dans une table Lut, qui interdise p dans la direction $\vec{v} = \vec{pq}$.

(i) Le voisinage de test autour de p est noté $\mathcal{M}_{Lut}$ et est G-symétrique au même titre que les masques de chanfrein considérés. Le générateur de $\mathcal{M}_{Lut}$ est noté $\mathcal{M}^g_{Lut}$. Étant donné $\vec{v} \in \mathcal{M}_{Lut}$, on appelle $\vec{v}^g$ le vecteur de $\mathcal{M}^g_{Lut}$ correspondant à $\vec{v}$ par symétrie.

(ii) La valeur minimale pour p et $\vec{v}$ est stockée dans $Lut[\vec{v}][DT[p]]$. Du fait de la G-symétrie, il est suffisant de ne stocker que les valeurs pour les vecteurs de $\mathcal{M}^g_C$, et donc la valeur minimale pour p et $\vec{v}$ est trouvée dans $Lut[\vec{v}^g][DT[p]]$.

Finalement on a le critère suivant :

$$p \in \text{MA} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{M}_{Lut}\ , \ DT[p+\vec{v}] < Lut[\vec{v}^g][DT[p]]\ . \tag{6.3}$$

La première apparition des tables de correspondance est due à Borgefors et al. [Bor91b], pour d_E en 2D. La table de correspondance est calculée par une recherche exhaustive ; la complexité est énorme mais le calcul n'a besoin d'être fait qu'une fois. La table est donnée dans l'article jusqu'à un rayon de $\sqrt{80}$. Par la suite, Borgefors [Bor93] a donné la table de correspondance pour la distance 2D $d_{\langle 5,7,11\rangle}$, dont les valeurs diffèrent du LMC pour des rayons inférieurs à $\chi = 60$; mais elle ne généralise sa méthode de calcul ni à d'autres distances ni à d'autres dimensions.

Dans [Thi94d, chap. 5], nous avons proposé un algorithme efficace pour calculer les tables de correspondance pour toute distance de chanfrein 2D, sous l'hypothèse que $\mathcal{M}_{Lut} = \mathcal{M}_C$; mais nous avons relevé dans [Thi94d, §5.5] que pour de grands masques, des points supplémentaires peuvent être détectés, ce qui remet en cause la validité de toute la méthode.

Remy a découvert que c'est l'hypothèse $\mathcal{M}_{Lut} = \mathcal{M}_C$ qui est fausse. En fait, les deux masques sont généralement complètement différents. Nous proposons dans la suite, un algorithme correct et efficace qui calcule aussi bien le masque $\mathcal{M}_{Lut}$ que la table de correspondance Lut en dimension n. Ces résultats ont été publiés en dimension 2, 3 et 4 dans [Thi00a] et dans [Thi02].

6.3 Méthode proposée pour calculer Lut et $\mathcal{M}_{Lut}$

6.3.1 Point de départ

Le calcul d'une valeur $Lut[\vec{v}][r]$ de la table de correspondance pour un rayon $r = DT[p]$ et une direction $\vec{v}$, consiste à trouver le plus petit rayon R de la boule $B^{-1}_d(p+\vec{v}, R)$ qui recouvre entièrement la boule $B^{-1}_d(p, r)$ (cf. figure 6.2). On peut trouver R, comme illustré sur la figure 6.6, en faisant décroître R_+ tant que la boule $B^{-1}_d(q, R_+)$ recouvre $B^{-1}_d(p, r)$, où $q = p+\vec{v} = p-\vec{v}^g$ par symétrie. Malheureusement, pour chaque rayon R_+ il est nécessaire de faire une transformation de distance inverse (RDT, cf §3.3.3), ce qui au total est très coûteux. Pour éviter cela, nous utilisons le lemme suivant (cf [Thi94d, p. 77]) qui lie les résultats de la DT et de la RDT, c'est-à-dire les boules et les boules inverses. Par (2.2) et (6.3) on a :

Lemme 6.1 $B_d(p, r) = B^{-1}_d(p, r+1)$.

(a)

		6		
	4	3	4	
6	3	0	3	6
	4	3	4	
		6		

(b)

		1		
	3	4	3	
1	4	7	4	1
	3	4	3	
		1		

FIG. 6.3 – *Différence entre (a)* $B_{\langle 3,4\rangle}(6)$ *et (b)* $B^{-1}_{\langle 3,4\rangle}(6+1)$.

(a)

				21	25
		14	18	22	27
	7	11	16	21	26
0	5	10	15	20	25

(b)

				7	5
		14	11	7	5
	21	18	14	10	5
28	25	20	15	10	5

FIG. 6.4 – *Différence entre (a)* CT^g *et (b)* DT^g *calculées sur* $B_{\langle 5,7,11\rangle}(27) \cap \mathrm{G}(\mathbb{Z}^2)$.

Bien que les ensembles soient les mêmes, il est important de noter que les valeurs des points sont différentes sur DT et RDT, comme on peut le constater à la figure 6.3. Le lemme 6.1 est le point de départ de notre méthode : nous allons montrer qu'il est suffisant de calculer DT dans $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$ une seule fois au début et ensuite de tester tous les recouvrements sur l'image résultante.

6.3.2 Cône de distances à l'origine

Nous nous restreignons aux distances de chanfrein ayant un masque G-symétrique et qui induisent une norme. Avec cette hypothèse, toutes les boules considérées sont (iii) convexes, (iv) G-symétriques et telles que (v) si $r_1 < r_2$ alors $B_d(O, r_1) \subseteq B_d(O, r_2)$. Nous pouvons donc limiter le test de recouvrement en restreignant les deux boules à $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$, voir figure 6.6.

Nous notons CT^g l'image résultant d'une transformation de distance, qui étiquète tout point de $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$ à sa distance à l'origine (voir figure 6.4.a). L'image CT^g peut être obtenue pour toute norme de chanfrein avec l'algorithme de la figure 6.5. Il calcule CT^g en un seul passage sur $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$, avec uniquement le générateur complété $\mathcal{M}_C^{\triangle}$ du masque $\mathcal{M}_C$ (cf §5.2.4).

```
Procedure CalculeCTg (L, M_C^△, CT^g) ;
CT^g[0, ..., 0] = 0 ;
for x_1 = 1 to L − 1 , for x_2 = 0 to x_1 , . . . , for x_n = 0 to x_{n−1} do
 {
   min = +∞ ;
   for each (v⃗, w) in M_C^△ do
   {
     (x'_1, ..., x'_n) = (x_1, ..., x_n) − v⃗ ;
     if (x'_1, ..., x'_n) ∈ G(Z^n) and CT^g[x'_1, ..., x'_n] + w < min
           then min = CT^g[x'_1, ..., x'_n] + w ;
   }
   CT^g[x_1, ..., x_n] = min ;
 }
```

FIG. 6.5 – *Algorithme rapide de transformée de distance à l'origine dans* $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$. ***Entrées :*** *L la largeur de l'image,* $\mathcal{M}_C^{\triangle}$ *le générateur complété du masque de* d_C. ***Sortie :*** CT^g *l'image de distance à l'origine, de taille* L^n.

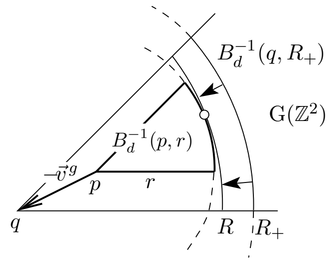


FIG. 6.6 – *Test de recouvrement de deux boules dans* $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^2)$.

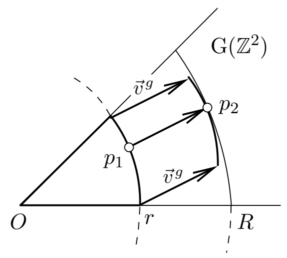


FIG. 6.7 – *Test de recouvrement translaté dans* CT^g.

6.3.3 Calcul d'une entrée du tableau *Lut*

Le recouvrement de la boule $B_d^{-1}(p, r)$ par $B_d^{-1}(q, R_+)$ peut être testé simplement en parcourant CT^g ; de plus, le plus petit rayon R peut être cherché pendant le balayage de CT^g. Nous proposons de translater les boules $B_d^{-1}(p, r)$ et $B_d^{-1}(q, R)$ à l'origine, comme indiqué sur la figure 6.7. Le point p_1 parcourt tous les points de $B_d^{-1}(O, r) \cap \mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$, et donne par translation de vecteur $\vec{v}^g$ le point p_2. Les valeurs de $d(O, p_1)$ et $d(O, p_2)$ sont lues sur CT^g. On a

$$
\begin{aligned}
R &= \max \left\{ d(O, p_2) \,:\, p_2 = p_1 + \vec{v}^g \,,\; p_1 \in B_d^{-1}(O, r) \cap \mathrm{G}(\mathbb{Z}^n) \right\} \,, \text{ et donc} \qquad (6.4)\\
R &= \max \left\{ d(O, p_1 + \vec{v}^g) \,:\, p_1 \in B_d^{-1}(O, r) \cap \mathrm{G}(\mathbb{Z}^n) \right\} \,. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

Cette méthode peut être efficacement implémentée (cf. figure 6.8), car toutes les relations de recouvrement (r, R) dans une direction $\vec{v}^g$ peuvent être détectées durant le même balayage (lignes 2–7). Afin de rester dans les limites de l'image CT^g, le parcours en x_1 est borné par $L - v^g_{x_1} - 1$ (où $v^g_{x_1}$ est la composante sur x_1 de $\vec{v}^g$). Pour chaque point p_1, on cherche le rayon r_1 correspondant, qui est $CT^g[p_1] + 1$ d'après le lemme 6.1. Puis on cherche le rayon r_2 de la boule passant par le point p_2. Sa valeur est $CT^g[p_2] + 1 = CT^g[p_1 + \vec{v}^g] + 1$, d'après le lemme 6.1. Durant le balayage, on conserve dans $Lut[\vec{v}^g][r_1]$ la plus grande valeur trouvée pour r_2, qui à la fin du processus, est R d'après (6.5).

```
   Procedure CalculeLutCol (CT^g, L, v⃗^g, R_max, Lut[v⃗^g]) ;
1  for r = 0 to R_max do Lut[v⃗^g][r] = 0 ;                   // Initialise Lut[v⃗^g] à 0.
2  for x_1 = 0 to L − v^g_{x_1} − 1 , for x_2 = 0 to x_1 , . . . , for x_n = 0 to x_{n−1} do
3   {
4     r_1 = CT^g[x_1, ..., x_n] + 1 ;                      // Rayon de la boule où p_1 se trouve,
5     r_2 = CT^g[(x_1, ..., x_n) + v⃗^g] + 1 ;                               // idem pour p_2.
6     if r_1 ≤ R_max and r_2 > Lut[v⃗^g][r_1] then Lut[v⃗^g][r_1] = r_2;
7   }
8  r_b = 0 ;
9  for r_a = 0 to R_max do
10    if Lut[v⃗^g][r_a] > r_b then r_b = Lut[v⃗^g][r_a] else Lut[v⃗^g][r_a] = r_b ;
```

FIG. 6.8 – *Algorithme de calcul d'une colonne de Lut en dimension n.* ***Entrées :*** CT^g *le cône, L la longueur du côté,* $\vec{v}^g$ *la direction de recherche,* R_{max} *la plus grande valeur de rayon devant être validée dans Lut.* ***Sortie :*** *la colonne* $Lut[\vec{v}^g]$ *est remplie avec les valeurs correctes.*

Durant cette étape, notre algorithme produit un ensemble de relations de recouvrement local, qui constituent un ordre partiel sur les recouvrements des boules. On peut observer dans *Lut*, des cas où $r_a < r_b$ alors que $Lut[\vec{v}^g][r_a] > Lut[\vec{v}^g][r_b]$, ce qui signifie que la boule recouvrant $B_d^{-1}(O, r_a)$ est plus grande que la boule recouvrant $B_d^{-1}(O, r_b)$. Or, comme on l'a vu au §6.3.2, on ne considère que des distances, ou tout au moins des fonctions, telles que si $r_1 < r_2$ alors $B_d(O, r_1) \subseteq B_d(O, r_2)$. On corrige donc en conséquence la table en supposant que dans ce cas, $Lut[\vec{v}^g][r_b]$ est au moins égal à $Lut[\vec{v}^g][r_a]$; ce faisant, nous construisons un ordre total compatible, qui correspond à l'emboîtement effectif des boules (figure 6.8, lignes 8–10).

6.3.4 Calcul du voisinage de test $\mathcal{M}_{Lut}$

Nous nous concentrons maintenant sur le calcul de l'ensemble de pondérations $\mathcal{M}^g_{Lut}$, qui par symétrie donne $\mathcal{M}_{Lut}$. Ce calcul est décrit par l'algorithme de la figure 6.9.

Supposons qu'un voisinage $\mathcal{M}_{Lut}$ soit suffisant pour extraire correctement l'axe médian de toute image DT dans laquelle les valeurs n'excèdent pas R_{Connu}. Cela signifie que $\mathcal{M}^g_{Lut}$ permet d'extraire de toute boule $B_d(O,R)$, où $R \leqslant R_{Connu}$, un axe médian qui est, par la définition 6.2, le seul point O (le centre). Au début, $\mathcal{M}^g_{Lut}$ est vide et $R_{Connu} = 0$.

Pour faire progresser R_{Connu} jusqu'à R_{Cible}, nous proposons de tester chaque boule $B_d(O,R)$ pour laquelle $R > R_{Connu}$, en extrayant à chaque fois sa transformation de distance et ensuite son axe médian, jusqu'à ce que R atteigne R_{Cible} ou qu'un point différent de O soit détecté dans l'axe médian de $B_d(O,R)$. Si R atteint R_{Cible}, alors nous savons que $\mathcal{M}^g_{Lut}$ permet l'extraction correcte de l'axe médian pour toute image DT contenant des valeurs inférieures ou égales à R_{Cible}, et donc que cette valeur R_{Cible} doit être mémorisée comme la nouvelle valeur de R_{Connu}.

Si au contraire, un point supplémentaire p est détecté dans l'axe médian durant le parcours, alors on sait que $\mathcal{M}^g_{Lut}$ ne suffit pas à extraire correctement l'axe médian, puisque par construction $B_d(O,R)$ recouvre $B_d^{-1}(p, DT^g[p])$. Dans ce cas, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 6.2 *Il est nécessaire et suffisant de rajouter la pondération $(p, CT^g[p])$ dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$ pour enlever p de l'axe médian de la boule $B_d(O,R)$.*

Preuve. Le voisinage $\mathcal{M}^g_{Lut}$ est validé jusqu'à $R-1$, donc il permet de trouver toutes les boules directes recouvrant la boule inverse $B_d^{-1}(p, DT^g[p])$ de rayon supérieur ou égal à $R-1$. Donc la seule boule qui n'a pas été testée est la seule boule de rayon R : c'est la boule $B_d(O,R)$ elle-même. La boule est dans la direction $\overrightarrow{pO}$ depuis p et doit être cherchée par $\mathcal{M}^g_{Lut}$ pour pouvoir enlever p de l'axe médian. Comme $\mathcal{M}_{Lut}$ est symétrique, $B_d(O,R)$ est détectée en rajoutant $\overrightarrow{Op}$ dans son générateur, i.e en rajoutant la nouvelle pondération $(\overrightarrow{Op}, CT^g[p])$ dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$. $\square$

Après avoir rajouté la nouvelle pondération, on calcule la nouvelle colonne correspondante qui se rajoute au tableau Lut. Ensuite, on s'assure que ce nouveau masque est maintenant suffisant pour enlever p. Ceci est un test de consistance de l'algorithme de calcul de la colonne de Lut de la figure 6.8, étant donné que le nouveau masque est correct par le lemme 6.2. Si ce test échoue, alors la seule explication peut être que l'algorithme n'arrive pas à construire une colonne de Lut assez restrictive pour enlever p. Dans ce cas, il ne peut exister de voisinage $\mathcal{M}_{Lut}$ et de table Lut pour cette distance.

Une fois p enlevé, on reprend le balayage pour le rayon R courant. D'autres points supplémentaires p peuvent être détectés séquentiellement, donnant à chaque fois une nouvelle pondération dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$ et une nouvelle colonne dans Lut. Le calcul de $\mathcal{M}^g_{Lut}$ est terminé lorsque R atteint R_{Cible}.

Finalement, si la fonction de distance choisie satisfait bien les hypothèses (iii–v) du §6.3.2, et si un masque suffisant $\mathcal{M}_{Lut}$ existe pour tout rayon R_{Cible} donné, alors notre algorithme calcule $\mathcal{M}_{Lut}$ ainsi que la table Lut correspondante. Sinon, cela signifie que toute la méthode des tables de correspondance est incorrecte pour cette distance, ce qui est aussi détecté par notre algorithme. Notons cependant que si une au moins des assertions (iii–v) n'est pas vérifiée, alors le résultat est imprévisible.

6.3.5 Algorithmes annexes

L'algorithme complet, présenté à la figure 6.9, utilise deux autres algorithmes donnés aux figures 6.10 et 6.11. Ce sont des versions adaptées de la transformation de distance et de l'extraction de l'axe médian, dont le temps de calcul est $(2^n n!)^2$ fois plus rapide que l'original (soit 64 fois en 2D, 2 304 fois en 3D et 147 456 fois en 4D) : elles agissent sur $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$ en utilisant les générateurs $\mathcal{M}^{\triangle}_C$ et $\mathcal{M}^g_{Lut}$, le tout en un seul balayage. Tout comme pour le calcul de CT^g, ces algorithmes ne sont valides que si les assertions (iii–v) du §6.3.2 sont vérifiées.


```
    Procedure CalculeEtVérifieLut (M_C^△, L, M_Lut^g, R_Connu, R_Cible, Lut);
1   CalculeCTg (L, M_C^△, CT^g);
2   for each v^g in M_Lut^g do CalculeLutCol (CT^g, v^g, R_Cible, Lut);
3   for R = R_Connu + 1 to R_Cible do
4    {
5     for x_1 = 0 to L − 1, for x_2 = 0 to x_1, ..., for x_n = 0 to x_{n−1} do
6       if CT^g[x_1, ..., x_n] ≤ R
7         then DT^g[x_1, ..., x_n] = 1
8         else DT^g[x_1, ..., x_n] = 0;        // Copie de B_d(R) ∩ G(Z^n) dans DT^g.
9     CalculeDTg (M_C^△, L, DT^g);
10    for x_1 = 1 to L − 1, for x_2 = 0 to x_1, ..., for x_n = 0 to x_{n−1} do
11      if DT^g[x_1, ..., x_n] ≠ 0 and EstMAg ((x_1, ..., x_n), M_Lut^g, Lut, DT^g) then
12      {
13        M_Lut^g = M_Lut^g ∪ (x_1, ..., x_n, CT^g[x_1, ..., x_n]);   // Extension de M_Lut^g
14        CalculeLutCol (CT^g, L, (x_1, ..., x_n), R_Cible, Lut[x_1, ..., x_n]);  // et de Lut.
15        if EstMAg ((x_1, ..., x_n), M_Lut^g, Lut, DT^g) then error;
16      }
17   }
```

Fig. 6.9 – *Algorithme complet de calcul de Lut avec détermination de $\mathcal{M}^g_{Lut}$ en dimension n. **Entrées :** $\mathcal{M}^{\triangle}_C$ le générateur complété du masque de chanfrein, L la longueur du côté des images, $\mathcal{M}^g_{Lut}$ le générateur du voisinage de Lut, R_{Connu} le dernier rayon vérifié et validé, R_{Cible} le rayon maximum à vérifier. **Sorties :** Lut la table de correspondance, R_{Cible} le nouveau rayon vérifié. Au premier appel, $\mathcal{M}^g_{Lut}$ et R_{Connu} doivent être initialisés à $\emptyset$ et 0 respectivement. Après la terminaison de cet algorithme, il faut mettre R_{Connu} à la valeur R_{Cible} pour dire que le nouveau $\mathcal{M}^g_{Lut}$ est valide jusqu'à R_{Cible}.*

On remarque que le calcul de DT^g (figure 6.9, ligne 9) est obligatoire, car l'axe médian est extrait à partir de la carte de distance aux bords. Or, un simple seuillage de l'image CT^g au rayon R donne seulement l'ensemble $B_d(O,R) \cap \mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$, mais pas les valeurs correctes de DT^g (cf. figure 6.4, où les valeurs diffèrent entre (a) et (b)).

```
Function EstMAg (p, M_Lut^g, Lut, DT^g);
for each v^g in M_Lut^g do
  if p − v^g ∈ G(Z^n) then                  // Test seulement dans G(Z^n).
    if DT^g[p − v^g] ≥ Lut[v^g][DT^g[p]] then return false;
return true;
```

Fig. 6.10 – *Extraction rapide des points de l'axe médian de B_d dans $\mathrm{G}(\mathbb{Z}^n)$. **Entrées :** p le point à tester, $\mathcal{M}^g_{Lut}$ le générateur du voisinage de Lut, Lut la table de correspondance, DT^g la transformation de distance de la section de boule. **Sortie :** renvoie **true** si le point p est détecté comme un point de* MA *dans DT^g.*

6.4 Résultats

Nous donnons de la figure 6.12 à la figure 6.15 quelques tables de correspondance calculées avec notre algorithme en 2D et 3D. Un exemple d'utilisation de ces tables en 2D, utilisant la

```
Procedure CalculeDTg (M_C^△, L, DT^g) ;
for x_n = L − 1 to 0 , for x_{n−1} = L − 1 to x_n , . . . , for x_1 = L − 1 to x_2 do
   if DT^g[x_1, ..., x_n] ≠ 0 then
   {
      min = +∞ ;
      for each (v⃗, w) in M_C^△ do
      {
         (x'_1, ..., x'_n) = (x_1, ..., x_n) + v⃗ ;
         if x' < L and DT^g[x'_1, ..., x'_n] + w < min
            then min = DT^g[x'_1, ..., x'_n] + w ;
      }
      DT^g[x_1, ..., x_n] = min ;
   }
```

FIG. 6.11 – *Algorithme rapide de transformée de distance dans* $G(\mathbb{Z}^n)$. ***Entrées** : L la largeur de l'image,* $\mathcal{M}_C^{\triangle}$ *le générateur complété du masque de* d_C. ***Sortie** :* DT^g *l'image de distance au bord, de taille* L^n.

formule (6.3) et la première ligne du tableau 6.12, est le suivant : un point de valeur 5 sur la DT n'est pas un point de l'axe médian, s'il a au moins un a-voisin supérieur ou égal à 6, ou un b-voisin supérieur ou égal à 8, ou un c-voisin supérieur ou égal à 12. Nous ne montrons dans les tables que les valeurs qui diffèrent du critère (6.3) (c'est-à-dire $Lut[\vec{v}^g][r] \neq r + w$), et donc qui représentent des irrégularités. Les tables sont aussi compressées en ne donnant que les rayons r possibles, c'est-à-dire les valeurs qui peuvent apparaître dans une DM ; elles peuvent être détectées en un simple balayage sur CT^g.

Nous donnons à la figure 6.12 le résultat de notre algorithme pour la distance 2D $d_{\langle 5,7,11\rangle}$. Les valeurs diffèrent de celles de Borgefors [Bor93] car nous calculons le plus petit rayon dans chaque classe de boules équivalentes, au lieu du plus grand. Puisque toutes les boules sont équivalentes entre ces deux rayons, les deux tables doivent être interprétées comme étant identiques.

$$\mathcal{M}_C^g = \mathcal{M}_{Lut}^g = \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{a} :\ (1,0\,;5) \\ \mathsf{b} :\ (1,1\,;7) \\ \mathsf{c} :\ (2,1\,;11) \end{array} \right\}$$

R	a	b	c
5	6	8	12
7	11	12	17
10	12	15	19
11		17	
14	17	19	23
15	19		
16		22	
18	22	23	28
20	23	26	30

R	a	b	c
21		27	
25	28	30	34
27		33	
28		34	
29	33		
30	34		
31		37	
32		38	
35	39	41	45

R	a	b	c
38		44	
39		45	
40	44		
42		48	
46		52	
49		55	
53		59	
60		66	

FIG. 6.12 – $\mathcal{M}_C^g$, $\mathcal{M}_{Lut}^g$ *et Lut pour la distance 2D* $d_{\langle 5,7,11\rangle}$.

$$\mathcal{M}_C^g = \left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a} :\ (1,0\,;14) \\ \mathsf{b} :\ (1,1\,;20) \\ \mathsf{c} :\ (2,1\,;31) \\ \mathsf{d} :\ (3,1\,;44) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{Lut}^g = \left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a} :\ (1,0\,;14) \\ \mathsf{b} :\ (1,1\,;20) \\ \mathsf{c} :\ (2,1\,;31) \\ \mathsf{d} :\ (3,1\,;44) \\ \mathsf{2c} :\ (4,2\,;62) \\ \mathsf{i} :\ (5,2\,;75) \end{array} \right\}$$

FIG. 6.13 – $\mathcal{M}_C^g$ *et* $\mathcal{M}_{Lut}^g$ *pour la distance 2D* $d_{\langle 14,20,31,44\rangle}$.

$\langle 3,4,5\rangle$

R	a	b	c
3	4	5	6

$\langle 4,6,7,9,10\rangle$

R	a	b	c	d	e
4	5	7	8	10	11
6	9	10	11	14	15
7	10				
8	11				
9		14	15		
12	15	17	18	20	21
16	19				

$\langle 19,27,33\rangle$

R	a	b	c
19	20	28	34
27	39	47	53
33	47	55	61
38	53	61	67
46	58	66	72
52	66	74	80
54	72	80	86
57	74	82	88
60	77	85	91
65	80	88	94
71	86	94	100
73	91	99	105

R	a	b	c
76	93	101	107
79	96	104	110
81	99	107	113
84	101	109	115
87	105	113	119
90	107	115	121
92	110	118	124
95	113	121	127
98	115	123	129
103	120	128	134
106	124	132	138
108	126	134	140

R	a	b	c
111	129	137	143
114	132	140	146
117	134	142	148
122	140	148	154
125	143	151	157
130	148	156	162
135	153	161	167
141	159	167	173
144	162	170	176
149	167	175	181
168	186	194	200

$\langle 3,4,5,\mathsf{e}\,7\rangle$

R	a	b	c	e
3	4	5	6	8
4			8	
6	8			
7			11	

$\langle 7,10,13,\mathsf{e}\,18\rangle$

R	a	b	c	e
7	8	11	14	19
10	15	18	19	26
13	18	21	24	29
14	19			
17	22	25	27	33
18			29	

R	a	b	c	e
20	26	29	32	37
23	29	32	34	40
24	29			
25			37	
26			37	
27	33			

R	a	b	c	e
28			40	
30	36	39	42	47
33			45	
34	40			
35			47	
36			47	

R	c
38	50
43	55
46	58
48	60
56	68

FIG. 6.14 – *Exemples de Lut pour des distances 3D pour lesquelles* $\mathcal{M}_C^g = \mathcal{M}_{Lut}^g$.

La figure 6.13 montre la différence entre $\mathcal{M}_C^g$ et $\mathcal{M}_{Lut}^g$, qui a causé le problème observé dans [Thi94d, p. 81] avec la distance $d_{\langle 14,20,31,44\rangle}$ de [Bor86]. On remarque la présence dans $\mathcal{M}_{Lut}^g$ du point 2c, qui n'est pas un point visible, alors que les points de $\mathcal{M}_C^g$ sont tous visibles.

Les distances utilisées dans les figures 6.14 et 6.15 sont des normes optimales pour l'approximation de d_E que l'on a vues au §5. La figure 6.14 montre quelques exemples de tableaux Lut pour des distances 3D pour lesquelles $\mathcal{M}_C^g = \mathcal{M}_{Lut}^g$. On donne à la figure 6.15 un exemple complet, comprenant aussi bien le masque calculé $\mathcal{M}_{Lut}^g$ que le tableau Lut pour la distance $d_{\langle 11,16,19,\mathsf{j}\,45\rangle}$. On note la différence entre $\mathcal{M}_C^g$ et $\mathcal{M}_{Lut}^g$, et comme à la figure 6.13, la présence de point non-visible (3e).

Alors que le calcul de la table Lut tel qu'il est donné à la figure 6.8 est très rapide (moins d'une seconde[1]), le calcul donné à la figure 6.9, qui inclut le calcul et la vérification de $\mathcal{M}_{Lut}^g$, est quant à lui beaucoup plus lourd, et son résultat doit donc être conservé pour tout usage ultérieur. Le calcul de $\mathcal{M}_{Lut}^g$ prend 41 secondes[1] pour la distance 3D $d_{\langle 11,16,19,\mathsf{j}\,45\rangle}$ pour $L = 100$ et pour $R_{Connu} = 0$ à $R_{Cible} = 1066$. Ce coût s'explique par le test systématique de 1066 boules $B_d(O,r)$, chacune d'entre elles nécessitant le calcul de CT^g et de l'axe médian. Il est donc bien plus intéressant d'utiliser des distances de chanfrein avec un faible coefficient d'échelle puisque cela donne moins de boules à tester et donc un résultat beaucoup plus rapide. Dans cette optique, il est dans la plupart des cas plus intéressant de privilégier l'ajout de nouvelles pondérations dans $\mathcal{M}_C^g$ pour pallier à la perte de qualité dans l'approximation de d_E. Par exemple, l'extraction de $\mathcal{M}_{Lut}^g$ pour la distance $d_{\langle 7,10,12,16,17\rangle}$ pour $L = 100$ de $R_{Connu} = 0$ à $R_{Cible} = 685$ est plus rapide (29 secondes[1]), tout en conduisant à une meilleure approximation de d_E. Une autre façon de

1. Sur un PC/Linux 650Mhz.

$$\mathcal{M}^g_C = \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{a}:\ (1,0,0\,;11) \\ \mathsf{b}:\ (1,1,0\,;16) \\ \mathsf{c}:\ (1,1,1\,;19) \\ \mathsf{j}:\ (3,2,1\,;45) \end{array} \right\} \qquad \mathcal{M}^g_{Lut} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathsf{a}:\ (1,0,0\,;11) & \mathsf{k}:\ (3,2,2\,;49) \\ \mathsf{b}:\ (1,1,0\,;16) & \mathsf{d}:\ (2,1,0\,;27) \\ \mathsf{c}:\ (1,1,1\,;19) & \mathsf{3e}:\ (6,3,3\,;90) \\ \mathsf{f}:\ (2,2,1\,;35) & \mathsf{j}:\ (3,2,1\,;45) \end{array} \right\}$$

R	a	b	c	f	k	d	3e	j
11	12	17	20	36	50	28	91	46
16	23	28	31	46	61	39	102	57
19	28	33	36	52	65	44	106	62
22	31	36	39	55	69	46	110	65
27	34	39	42	57	72	50	113	68
30	39	44	46	62	76	55	117	73
32	42	46	50	65	80	57	121	76
33					81		121	
35	45	50	53	68	83	61	124	79
38	46	52	55	71	84	62	125	81
41	50	55	58	74	88	66	129	84
43	53	57	61	76	91	68	132	87
44			62	78	91		132	
45				79				
48	57	62	65	81	95	73	136	91
49					97		136	
51	61	66	69	84	99	77	140	95
52	62				100	78	140	
54	64	68	72	87	102	79	143	98
55					103		144	
56				90				
57				91				
59	69	74	77	93	107	84	148	103
60			78	94	107		148	
61				95				
63	73	78	81	97	110	89	151	107
64		79		98		90		

R	a	b	c	f	k	d	3e	j
66			84	100	114		155	
67				101				
70	80	84	88	103	118	95	159	114
71					119		159	
72				106				
73			91	107	121		162	
74	84				122	100	163	
75		90		109		101		
76				110				
79				113				
80		95		114		106		
81					129		170	
82			100	116	129		170	
83				117				
85	95	100	103	119	133	111	174	129
86		101		120		112		
88				122				
89				123				
92			110	126	140		181	
93					141		182	
95				129				
96						122		
98				132				
99				133				
101				135				
102				136				
104			122	138	152		193	

R	k
105	139
108	142
111	145
114	148
117	151
118	152
120	154
121	155
124	158
127	161
130	164
133	167
137	171
140	174
143	177
146	180
149	183
156	190
159	193
162	196
165	199
175	209
178	212
194	228

FIG. 6.15 – $\mathcal{M}^g_{Lut}$ *et Lut pour la distance 3D* $d_{\langle 11,16,19,\mathsf{j}\,45\rangle}$.

réduire le coût de calcul est de ne tester qu'une seule fois chaque classe de boules équivalentes. Mais pour la plupart des distances de chanfrein le gain n'est pas significatif, car les boules équivalentes n'apparaissent que pour des rayons faibles, où la vérification est rapide.

D'autres exemples ainsi que les sources en dimension 2, 3 et 4 sont disponibles sur

`http://www.lim.univ-mrs.fr/~thiel/PRL2001/index.html` .

6.5 Application à la distance euclidienne

Notre méthode de calcul est suffisamment générale pour être appliquée en dehors du cadre des distances de chanfrein. Nous présentons dans cette section le résultat pour d_E^2 en 2D. Cette fonction n'est pas une distance, mais satisfait les propriétés nécessaires à la validité de l'algo-

rithme (cf §6.3.2). Il en va de même pour les fonctions discrètes round(d_E) et $\lfloor d_E \rfloor$, que Remy a testé avec succès. Les résultats sont les mêmes pour d_E et d_E^2 (à la racine carrée près) car les boules sont identiques ; ils diffèrent pour round(d_E) et $\lfloor d_E \rfloor$.

Pour adapter à d_E^2 le calcul de *Lut* et $\mathcal{M}^g_{Lut}$, les deux seuls algorithmes à changer sont CalculeCTg et CalculeDTg. L'adaptation de CalculeCTg (distances à l'origine) est triviale, à partir de la formule directe $\sqrt{x^2+y^2}$. Par contre, celle de CalculeDTg (distances au bord de la boule) est beaucoup plus complexe à mettre en œuvre, et son influence sur le temps de calcul global est considérable comme on va le voir.

Nous avons choisi d'utiliser une version modifiée de la DT de Saito et Toriwaki (voir [Sai94] et §3.2.3) : elle fournit un résultat exact et s'adapte relativement aisément à la transformation dans $G(\mathbb{Z}^2)$; en particulier, on peut supprimer les *retours* sur les lignes et colonnes et ne faire que les *aller* (voir [Rem01]). En 3D l'adaptation est plus difficile, car on ne peut restreindre à $G(\mathbb{Z}^3)$ le calcul, qui doit être fait sur tout un orthant de $\mathbb{Z}^3$, au prix d'un facteur 6. Nous soulignons le fait que la DT sur une boule constitue le pire cas de figure pour la complexité de l'algorithme de Saito et Toriwaki (voir §3.2.3), et que d'autres algorithmes exacts pourraient être choisis avec profit.

Nous présentons les résultats de notre méthode pour d_E^2 en 2D aux figures 6.16 et 6.17. La complexité de CalculeDTg est en $O(3.R^3)$ et celle de CalculeLutCol est en $O(R^2)$ pour une boule de rayon R. L'algorithme CalculeEtVérifieLut faisant croître R, le coût de CalculeDTg devient vite prohibitif. Nous signalons aussi le coût de stockage en mémoire de *Lut*, qui est de $m^g_{Lut}\, R_{Connu}\, e$, où m^g_{Lut} est le nombre de colonnes dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$, R_{Connu} est le carré du rayon de la plus grande boule euclidienne testée, et e est la taille d'un entier long (pour stocker une valeur de d_E^2). Nous avons atteint au bout de 6 mois de calcul[1] $R_{Connu} = 1\,956\,776$, c'est-à-dire une boule de rayon 1 398, et nous avons détecté 132 pondérations dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$; la place mémoire actuelle occupée par *Lut* est de 950 Mo.

Nous montrons à la figure 6.16 les coordonnées des pondérations dans $\mathcal{M}^g_{Lut}$, et donnons le rayon R de détection par CalculeEtVérifieLut. Ce rayon permet de limiter le nombre de pondérations à tester dans un calcul d'axe médian sur une DM où la plus grande valeur R_{max} de d_E^2 est inférieure à R. Par exemple, si R_{max} est inférieur à 10 000, il suffira de prendre les 15 premières pondérations de $\mathcal{M}^g_{Lut}$. La figure 6.16 valide également le voisinage de test 3×3 utilisé dans [Bor91b] jusqu'à un rayon de $\sqrt{80}$; la $3^{ème}$ pondération n'apparaissant que pour le rayon $\sqrt{101}$.

Le calcul de l'axe médian peut être conduit de manière raisonnable, en stockant définitivement le tableau de la figure 6.16, puis en cherchant R_{max} sur DM. Au lieu de calculer toutes les colonnes de *Lut*, ce qui peut nécessiter une place mémoire gigantesque, il suffit de n'allouer qu'une seule colonne, et de boucler sur les pondérations de $\mathcal{M}_{Lut}$ en écrasant chaque fois la colonne : pour chaque pondération, on calcule la colonne de *Lut* avec CalculeLutCol (deux balayages), puis on examine DM pour rejeter les points que ne satisfont pas (6.3) pour cette pondération (un seul balayage), et ainsi de suite.

La figure 6.17 représente géométriquement les pondérations de $\mathcal{M}^g_{Lut}$, en donnant leur numéro d'apparition. On voit dans cette figure que les pondérations détectées sont toujours des points visibles (cases blanches), que l'ordre est relativement aléatoire mais suit certaines directions, et enfin que tous les points visibles à partir de l'origine semblent être progressivement détectés. Ces expérimentations nous laissent espérer des propriétés arithmétiques (à long terme) et nous font émettre la conjecture suivante :

Conjecture 6.1 *Le voisinage de test* $\mathcal{M}_{Lut}$ *pour* d_E^2 *est formé uniquement de points visibles ; le nombre de pondérations dans* $\mathcal{M}_{Lut}$ *croît avec* R *et n'est pas borné.*

D'après cette conjecture il n'existe pas de $\mathcal{M}_{Lut}$ fini pour extraire l'axe médian sur toute

1. Calcul incrémental nuits et week-ends, sur un Sparc SunW Ultra-Enterprise avec 1.2 Go de RAM

i	x,y	R
1	1,0	1
2	1,1	2
3	2,1	101
4	3,1	146
5	3,2	424
6	4,1	848
7	5,1	1 370
8	6,1	2 404
9	4,3	3 049
10	7,1	3 250
11	5,2	3 257
12	7,5	3 700
13	5,3	4 709
14	7,3	5 954
15	5,4	9 805
16	8,1	11 237
17	9,1	11 889
18	10,1	14 885
19	7,4	19 465
20	11,1	20 738
21	6,5	22 261
22	7,2	22 736
23	9,2	26 216
24	8,7	28 564
25	7,6	29 042
26	9,4	35 113
27	8,3	38 900
28	9,5	44 433
29	11,6	44 433
30	8,5	46 660
31	14,1	57 128
32	12,1	58 084
33	11,4	59 417
34	9,8	64 089
35	13,1	64 528
36	15,1	66 050
37	12,7	66 820
38	10,3	72 194
39	13,7	75 242
40	11,3	76 040
41	11,5	91 012
42	9,7	92 240
43	13,6	104 452
44	11,2	109 609
45	11,9	117 137
46	10,9	125 512
47	16,1	128 178
48	12,5	129 284
49	17,1	145 162
50	15,7	163 729
51	20,1	176 402
52	11,10	180 601
53	15,8	195 025
54	17,5	229 220
55	11,7	231 368
56	10,7	234 400
57	14,5	235 780
58	15,4	238 088
59	13,4	244 561
60	18,1	251 024
61	19,1	251 024
62	13,5	251 789
63	17,9	262 946
64	14,3	301 513
65	22,1	330 632
66	23,1	330 632
67	12,11	347 785
68	15,13	356 176
69	21,1	357 617
70	13,9	411 625
71	11,8	426 980
72	17,8	468 505
73	13,2	481 717
74	13,3	482 914
75	19,9	531 801
76	13,12	548 116
77	19,4	555 853
78	16,15	556 516
79	24,1	611 536
80	25,1	616 226
81	16,9	621 637
82	21,11	646 468
83	14,13	658 957
84	19,10	668 098
85	17,7	670 084
86	20,9	687 464
87	27,1	705 602
88	17,12	707 625
89	18,7	733 328
90	19,6	735 637
91	16,5	739 237
92	20,7	748 177
93	19,11	769 105
94	23,11	794 194
95	14,9	806 041
96	15,2	837 316
97	15,14	883 129
98	17,16	888 445
99	19,3	890 965
100	16,3	918 944
101	21,5	951 949
102	13,10	977 288
103	17,11	983 282
104	16,7	988 349
105	17,6	1 088 000
106	28,1	1 104 616
107	31,1	1 113 032
108	21,10	1 137 380
109	26,1	1 153 538
110	13,8	1 163 429
111	18,11	1 171 201
112	29,1	1 181 581
113	30,1	1 181 581
114	32,1	1 188 101
115	17,3	1 207 645
116	26,9	1 214 225
117	17,2	1 278 945
118	17,4	1 320 309
119	13,11	1 324 096
120	21,8	1 482 250
121	23,8	1 484 825
122	25,13	1 502 504
123	17,13	1 546 609
124	23,12	1 553 281
125	24,7	1 609 616
126	16,11	1 667 714
127	15,11	1 669 000
128	19,8	1 741 220
129	22,7	1 770 941
130	21,4	1 773 608
131	33,1	1 776 890
132	14,11	1 947 717

FIG. 6.16 – *Voisinage de test $\mathcal{M}^g_{Lut}$ pour d^2_E : numéro d'ordre i, coordonnées x, y, rayon d'apparition R.*

DM de d^2_E ; l'extraction de l'axe médian est possible mais reste une opération globale et non purement locale sur l'image. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où le calcul de DM est lui-même global pour d^2_E. De plus, le nombre de normales des boules de d^2_E croît indéfiniment avec R, contrairement à d_C.

On peut obtenir un gain de place non négligeable dans les colonnes de *Lut* en ne représentant que les valeurs possibles dans une DM avec d^2_E, c'est-à-dire l'ensemble $\{\, a^2+b^2 \,:\, a, b \in [0 .. R] \,\}$. On peut encore économiser de la mémoire en 3D (mais en moins grande proportion), étant donné que $a^2 + b^2 + c^2$ ne remplit pas $\mathbb{N}$. Par contre en 4D, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ remplit $\mathbb{N}$ (thm. de Lagrange, [Har78, §20.5]) et on ne peut plus bénéficier d'un gain de place. En fait, on assiste à un phénomène remarquable : la disparition en 4D des boules équivalentes pour d^2_E (toutes les boules sont différentes puisque tous les rayons sont atteints). Ceci fait disparaître l'une des difficultés de la détection de l'axe médian, et l'on peut se demander si *Lut* et $\mathcal{M}_{Lut}$ ne seraient pas plus simples en 4D et en dimensions supérieures.

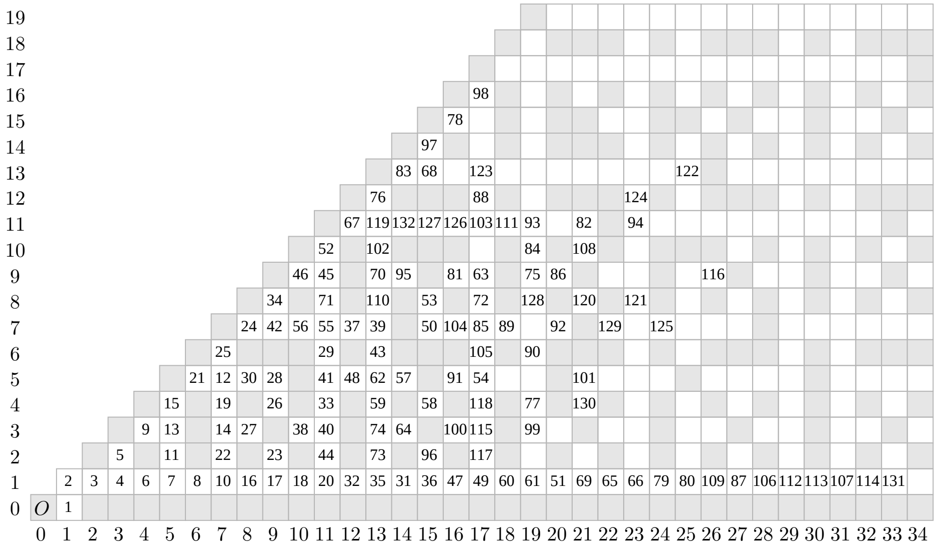


FIG. 6.17 – *Représentation de $\mathcal{M}^g_{Lut}$ pour d^2_E : les valeurs correspondent au numéro d'apparition ; les cases blanches sont les points visibles et les cases grises sont les points non-visibles.*

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le calcul de l'axe médian sur une image de distance, et proposé une solution valable pour toute norme de chanfrein en dimension n. L'approche par table de correspondance était déjà connue dans la littérature, mais aucune méthode de calcul automatique de *Lut* n'était donnée.

Dans un premier travail [Thi94d], nous avons proposé un algorithme efficace de calcul de *Lut*, mais sans le justifier et en relevant des contre-exemples. Nous avons apporté une solution à ce problème dans [Thi00a], [Thi02] et ce chapitre, où nous montrons que le calcul de *Lut* est indissociable de celui du voisinage de test $\mathcal{M}_{Lut}$. Nous donnons un deuxième algorithme permettant la détermination et la validation de ce masque $\mathcal{M}_{Lut}$ jusqu'à un rayon de boule donné. Nos deux algorithmes tiennent compte des propriétés de symétrie des boules afin de réduire leurs coûts de calcul. Nous donnons enfin des exemples pour diverses normes de chanfrein de la littérature.

Nos expérimentations ont montré que dans le cas général, le voisinage de test $\mathcal{M}_{Lut}$ n'est pas égal au masque de chanfrein $\mathcal{M}_C$. Ceci n'est finalement pas trop surprenant dans la mesure où $\mathcal{M}_{Lut}$ provient de l'emboîtement de boules discrètes. La géométrie du bord des boules est localement irrégulière, ce qui rend l'analyse des inclusions bien plus complexe que dans le cas de boules continues. On peut raisonnablement conjecturer que $\mathcal{M}_{Lut} = \mathcal{M}_C$ pour les masques de taille 3, et que $\mathcal{M}_{Lut}$ est toujours de taille finie. Un travail supplémentaire très profond est à prévoir pour comprendre les phénomènes arithmétiques sous-jacents : le problème est ouvert et l'outil est disponible pour explorer les cas de figure. Par exemple, certaines *Lut* présentent un nombre fini d'irrégularités (c'est-à-dire de valeurs qui diffèrent du critère LMC) ; trouver une borne supérieure des irrégularités permettrait de limiter la vérification. Cette borne supérieure est probablement liée à la notion de conducteur χ (voir §6.2.2).

Enfin, nous avons adapté notre méthode à d^2_E et montré une nouvelle fois l'intérêt des distances de chanfrein par rapport à la distance euclidienne, pour laquelle le coût en temps de calcul et en mémoire est sans commune mesure. Toutefois, une étude approfondie devrait révéler d'intéressantes propriétés arithmétiques.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

La géométrie discrète est un domaine très vaste et relativement récent où il reste beaucoup à faire, en particulier en 3D, qui pose des problèmes souvent bien plus difficiles qu'en 2D, et aussi en 4D, quasiment inexploré, qui trouve son utilité par exemple sur les séquences de volumes dans le temps ou l'étude de trajectoires.

Nous avons fait au chapitre 2 une présentation détaillée des différentes notions reliées à notre thème de recherche, intitulé « géométrie des distances de chanfrein », et fait au chapitre 3 une étude bibliographique approfondie des distances discrètes couramment utilisées dans les transformations de distance.

Nous avons développé au chapitre 4 une théorie générale des masques de chanfrein dans un module en dimension finie, nous permettant d'établir le rôle actif ou passif joué par les pondérations dans un masque, puis de définir une condition suffisante de norme discrète qui s'appuie sur la convexité dans un espace projectif en faisant un aller-retour de $\mathbb{Z}^n$ à $\mathbb{R}^n$. Nous proposons la notion de spectre d'un masque, nous faisons apparaître les notions de cône d'influence et de déplacements élémentaires et donnons les formules directes.

Nous avons ensuite proposé au chapitre 5 un procédé de construction de normes de chanfrein en s'appuyant sur notre cadre théorique et en utilisant les triangulations de Farey sur les points visibles. La méthode est plus particulièrement développée dans $\mathbb{Z}^3$ avec des systèmes de contraintes de convexité locale (CCL) traduites en contraintes sur les pondérations. Nous procédons enfin à l'optimisation de masques de norme de chanfrein discrète en énumérant les masques dans l'espace des contraintes.

Une étude de cas plus poussée est réalisée en 3D par Remy dans [Rem01] ; celui-ci propose une autre preuve de la condition de norme avec un raisonnement incrémental très instructif. Il reste à effectuer une étude comparable en 4D ; la difficulté est plus d'ordre géométrique qu'algébrique. En effet pour établir les CCL il est important d'orienté les facettes, ce qui n'est pas trivial dans cette dimension.

Remy propose également dans [Rem01] une construction de norme ne s'appuyant pas sur les triangulations de Farey, dans le but de produire des triangulations plus régulières géométriquement. Son idée est de surcharger les masques avec des points non atteints dans chaque cône d'influence. Une application possible de ce procédé est de trouver un masque dont les boules réalisent un polytope central-symétrique arbitraire.

Enfin au chapitre 6 nous avons étudié le calcul de l'axe médian sur une image de distance. Nous avons proposé et justifié un algorithme qui calcule très efficacement les tables de correspondance Lut et simultanément le voisinage de test $\mathcal{M}_{Lut}$. Nous montrons un phénomène remarquable qui est que $\mathcal{M}_{Lut}$ est en général différent du masque de chanfrein. Ce phénomène est lié à des questions d'emboîtement de contours des boules, qui présentent certaines irrégularités caractéristiques. Nous disposons donc maintenant d'un outil pour explorer les cas de figure et chercher une explication arithmétique. À titre de comparaison, nous sommes dans la situation

où nous aurions prouvé l'algorithme de Bresenham et envisagerions de caractériser la longueur des paliers.

À la fin du même chapitre nous montrons la généralité de notre algorithme de calcul de Lut et $\mathcal{M}_{Lut}$ en l'adaptant à d_E^2. L'implémentation de la méthode en 2D et de longs mois de temps de calcul ont montré la différence importante d'efficacité entre l'exploitation des distances de chanfrein et celle de la distance euclidienne. Nous conjecturons pour d_E^2 que $\mathcal{M}_{Lut}$ n'est pas fini pour une image de distance quelconque, qu'il ne comprend que des points visibles, et qu'il remplit progressivement l'ensemble des points visibles en partant de O. L'explication et la preuve de ce phénomène sont prévus pour le long terme. Il reste à expérimenter le cas 3D et le cas 4D ; dans ce dernier cas il se pourrait que les choses soient simplifiées en raison de la disparition des boules équivalentes (la somme de 4 carrés rempli $\mathbb{N}$).

Tous ces résultats montrent l'intérêt de notre approche et sont donc promis à d'intéressants développements, en particulier arithmétiques.

Bibliographie

[Akt96] Z. Aktouf, G. Bertrand, et L. Perroton. A 3D-hole closing algorithm. In 6^{th} *Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1176 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 36–47, Lyon, France, Nov 1996.

[And00] E. Andrès. *Modélisation analytique discrète d'objets géométriques.* Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Univ. de Poitiers, Dec 2000.

[Arc88] C. Arcelli et G. Sanniti di Baja. Finding local maxima in a pseudo-euclidean distance transform. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 43:361–367, 1988.

[Arc92] C. Arcelli et M. Frucci. Reversible skeletonization by (5-7-11)-erosion. In C. Arcelli et al., editors, *Visual Form Analysis and Recognition*, pages 21–28. Plenum, New York, 1992.

[Bar77] H.G. Barrow, J.M. Tenenbaum, R.C. Bolles, et H.C. Wolf. Parametric correspondence and chamfer matching: two new techniques for image matching. In *proc.* 5^{th} *Int. Joint Conf. on Artif. Intell.*, pages 659–663, 1977.

[Bec65] E.F. Beckenbach et R. Bellman. *Inequalities.* Springer Verlag, $2^{ème}$ édition révisée, 1965.

[Bec89] A.L.D. Beckers et A.W.M. Smeulders. A comment on "A note on 'Distance transformations in digital images' ". *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 47:89–91, 1989.

[Bec92a] J.M. Becker. Approximations de la distance euclidienne sur trame : extension de la méthode Montanari-Borgefors. In *Distancia'92, congrès international sur l'analyse en distance*, pages 263–266, Rennes, Juin 1992.

[Bec92b] A.L.D. Beckers et A.W.M. Smeulders. Optimization of length measurements for isotropic distance transformations in three dimensions. *Computer Vision and Image Understanding*, 55(3):296–306, 1992.

[Ber90] M. Berger. *Géométrie (2 tomes).* Nathan, 1990.

[Ber94a] E. Bertin. *Diagrammes de Voronoï 2D et 3D : Applications en analyse d'images.* Thèse de Doctorat, U. Joseph Fourier, Grenoble 1, 1994.

[Ber94b] G. Bertrand. Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids. *Pattern Recognition Letters*, 15(10):1003–1011, 1994.

[Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, Cambridge, 1967. MIT Press.

[Blu70] L.M. Blumenthal. *Theory and Applications of Distance Geometry.* (Oxford University Press 1953), Chelsea, 2^{nd} ed., 1970.

[Boi95] J.D. Boissonnat et M. Yvinec. *Géometrie algorithmique.* Edisciences International, Paris, 1995.

[Bol92] P. Bolon, J.L. Vila, et T. Auzepy. Opérateur local de distance en maillage rectangulaire. In 2^{nd} *Discrete Geometry for Computer Image*, pages 45–56, Grenoble, Sept 1992.

[Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[Bor86] G. Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 34:344–371, 1986.

[Bor88a] G. Borgefors. Distance transformations in hexagonally digitized images. Technical Report C 30497-3.3, FOA, Linköping, Sweden, June 1988.

[Bor88b] G. Borgefors. Hierarchical chamfer matching: A parametric edge matching algorithm. *IEEE Trans. on PAMI*, 10:849–865, 1988.

[Bor91a] G. Borgefors. Another comment on 'a note on 'distance transformation in digital images". *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54:301–306, 1991.

[Bor91b] G. Borgefors, I. Ragnemalm, et G. Sanniti di Baja. The Euclidean Distance Transform : finding the local maxima and reconstructing the shape. In 7^{th} *Scandinavian Conf. on Image Analysis*, volume 2, pages 974–981, Aalborg, Denmark, 1991.

[Bor93] G. Borgefors. Centres of maximal disks in the 5-7-11 distance transform. In 8^{th} *Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 105–111, Tromsø, Norway, 1993.

[Bor94] G. Borgefors. Applications using distance transforms. In C. Arcelli et al., editors, *Aspects of Visual Form Processing*, pages 83–108. World Scientific, Singapore, 1994.

[Bor96] G. Borgefors. On digital distance transforms in three dimensions. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):368–376, 1996.

[Bor97] G. Borgefors et I. Nyström. Efficient shape representation by minimizing the set of centres of maximal discs/spheres. *Pattern Recognition Letters*, 18:465–472, 1997.

[Bor00] G. Borgefors. Some weighted distance transforms in four dimensions. In 9^{th} *Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1953 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 325–336, Uppsala, Sweden, Dec 2000.

[Bor01] G. Borgefors et S. Svensson. Optimal local distances for distance transforms in 3D using an extended neighbourhood. In C. Arcelli et al., editors, *Visual Form, Capri, May 2001*, volume 2059 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 113–122. Springer-Verlag, 2001.

[Bou74] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Diffusion C.C.L.S, Paris, 1974.

[Bre95] H. Breu, J. Gil, D. Kirkpatrick, et M. Werman. Linear time Euclidean distance transform algorithms. *IEEE Trans. on PAMI*, 17(5):529–533, 1995.

[But98] M.A. Butt et P. Maragos. Optimum design of chamfer distance transforms. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 7(10):1477–1484, Oct 1998.

[Cha91] J.M. Chassery et A. Montanvert. *Geométrie discrète en analyse d'images.* Hermès, 1991.

[Cha92] D. Chaudhuri, C.A. Murthy, et B.B. Chaudhuri. A modified metric to compute distance. *Pattern Recognition*, 25(7):667–677, 1992.

[Con88] J.H. Conway et N.J.A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Grundlehren 290. Springer-Verlag, Heildelberg, 1988.

[Coq93] D. Coquin et P. Bolon. Comparaison d'opérateurs locaux de distance. In *3^{rd} Discrete Geometry for Computer Image*, pages 182–191, Strasbourg, Sept 1993.

[Coq94] D. Coquin, Y. Chehadeh, et P. Bolon. Opérateur local de distance 3D, en maillage parallélépipédique. In *4^{th} Discrete Geometry for Computer Image*, pages 147–156, Grenoble, Sept 1994.

[Coq95] D. Coquin et P. Bolon. Discrete distance operator on rectangular grids. *Pattern Recognition Letters*, 16:911–923, 1995.

[Cor89] L.P. Cordella et G. Sanniti di Baja. Geometric properties of the union of maximal neighborhoods. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(2):214–217, 1989.

[Cox74] H.S.M. Coxeter. *Regular polytopes.* Dover Publications, $3^{ème}$ edition, 1974.

[Cui99a] O. Cuisenaire. *Distance Transformations: Fast Algorithms and Applications to Medical Image Processing.* PhD thesis, Univ. C. de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, Oct 1999.

[Cui99b] O. Cuisenaire et B. Macq. Fast and exact signed Euclidean distance transformation with linear complexity. In *Proc. of ICASSP, Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 6, pages 3293–3296, Phoenix, AZ, USA, Mar 1999.

[Cui99c] O. Cuisenaire et B. Macq. Fast Euclidean distance transformation by propagation using multiple neighborhoods. *Computer Vision and Image Understanding*, 76(2):163–172, Nov 1999.

[Dan80] P.E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980.

[Dan93] P.E. Danielsson. 3D octogonal metrics. In *8^{th} Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 727–736, 1993.

[Das87] P.P. Das, P.P. Chakrabarti, et B.N. Chatterji. Distances functions in digital geometry. *Inform. Sci.*, 42(2):113–136, 1987.

[Das89] P.P. Das. More on path generated digital metrics. *Pattern Recognition Letters*, 10:25–31, 1989.

[Das90a] P.P. Das. Lattice of octagonal distances in digital geometry. *Pattern Recognition Letters*, 11:663–667, 1990.

[Das90b] P.P. Das et B.N. Chatterji. Octogonal distances for digital pictures. *Information Sciences*, 50:123–150, 1990.

[Das90c] P.P. Das et J. Mukherjee. Metricity of super-knight's distance in digital geometry. *Pattern Recognition Letters*, 11:601–604, 1990.

[Das91] P.P. Das. Counting minimal paths in digital geometry. *Pattern Recognition Letters*, 12:595–603, 1991.

[Dau00] A. Daurat. *Convexité dans le plan discret – Application à la tomographie.* Thèse de Doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7, Dec 2000.

[Dav80] E.R. Davies et A.P.N. Plummer. A new method for the compression of binary picture data. In *5^{th} ICPR*, pages 1150–1152, Miami, 1980.

[Del01] C. Delpias. *Sur l'enveloppe convexe des systèmes CC ou des chirotopes de rang supérieur à trois.* Thèse de Doctorat, Univ. de la Méditerranée, Marseille 2, Mai 2001.

[Dez97] M.M. Deza et M. Laurent. *Geometry of Cuts and Metrics*, volume 15 de *Algorithms and Combinatorics.* Springer, 1997.

[Dij59] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269–271, 1959.

[Egg69] H.G. Eggleston. *Convexity.* University Press, Cambridge, (1958), 1969.

[Egg97] H. Eggers. Fast parallel Euclidean distance transformation in $\mathbb{Z}^n$. In *SPIE Proceedings,* vol. 3168, Vision Geometry VI, pages 33–40, San Diego, CA, Jul 1997.

[Egg98] H. Eggers. Two fast euclidean distance transformations in $\mathbb{Z}^2$ based on sufficient propagation. *Computer Vision and Image Understanding*, 69(1):106–116, Jan 1998.

[Emb96] H. Embrechts et D. Roose. A parallel Euclidean distance transformation algorithm. *Computer Vision and Image Understanding*, 63:15–26, 1996.

[Fol95] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, et R.L. Phillips. *Introduction à l'infographie.* Addison-Wesley, 1995.

[For89] S. Forchhammer. Euclidean distances from chamfer distances for limited distances. In *6^{th} Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 393–400, Oulu (Finland), 1989.

[Fra96] J. Françon. On recent trends in discrete geometry in computer science. In *6^{th} Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1176 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 3–16, Lyon, France, Nov 1996.

[Gra92] D.J. Grabiner. Farey nets and multidimensional continued fractions. *Monatshefte für Mathematik*, 114:35–60, 1992.

[Gra98] R.L. Graham, D.E. Knuth, et O. Patashnik. *Mathématiques concrètes.* International Thomson Publishing France, Paris, $2^{ème}$ edition, 1998.

[Gru67] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume XVI de *Pure and Applied Mathematics.* Interscience, 1967.

[Har51] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, et G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, London, 1951.

[Har78] G.H. Hardy et E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, fifth edition, October 1978.

[Hil69] J. Hilditch et D. Rutovitz. Chromosome recognition. *Ann. New York Acad. Sci.*, 157:339–364, 1969.

[Hua94] C.T. Huang et O.R. Mitchell. A Euclidean distance transform using greyscale morphology decomposition. *IEEE Trans. on PAMI*, 16(4):443–448, 1994.

[Huj87] M. Hujter et B. Vizvari. The exact solutions to the Frobenius problem with three variables. *Ramanujan Math. Soc.*, 2(2):117–143, 1987.

[Jen06] Jensen J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.*, 30:175–193, 1906.

[Jen92] J.F. Jenq et S. Sahni. Serial and parallel algorithms for the Medial Axis Transform. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(12):1218–1224, 1992.

[Jon00] P.P. Jonker. Morphological operations on 3D and 4D images: from shape primitive detection to skeletonization. In *9^{th} Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1953 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 371–391, Uppsala, Sweden, Dec 2000.

[Jou93] A. Joux. *La réduction de réseaux en cryptographie.* Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1993.

[Kis96] C.O. Kiselman. Regularity properties of distance transformations in image analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):390–398, Nov 1996.

[Knu92] D.E. Knuth. *Axioms and Hulls*. Springer-Verlag, 1992.

[Kon89] T.Y. Kong et A. Rosenfeld. Digital topology: introduction and survey. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 48:357–393, 1989.

[Kor91] B. Korte, L. Lovász, et R. Schrader. *Greedoids*, volume 4 de *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1991.

[Lau92] JP. Laurent et C. Frendo Rosso. Application of image analysis to the estimation of AAC thermal conductivity. In *3^{rd} RILEM Int. Symp. on Autoclaved Aerated Concrete*, pages 14–16, Zürich, Switzerland, 1992.

[Lee97] Y.H. Lee, S.J. Horng, T.W. Kao, et Y.J. Chen. Parallel computation of the Euclidean distance transform on the mesh of trees and the hypercube compute. *Computer Vision and Image Understanding*, 68(1):109–119, Oct 1997.

[Len82] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra, et L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. *Math. Ann.*, 261:515–534, 1982.

[Ley92] F. Leymarie et M. D. Levine. Fast raster scan distance propagation on the discrete rectangular lattice. *CVGIP-IU*, 55(1):84–94, Jan 1992.

[Mar96] J. Martinet. *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens.* Mathématiques. Masson, Paris, 1996.

[Mar00] J.L. Mari et J. Sequeira. Using implicit surfaces to characterize shapes within digital volumes. In *RECPAD'00*, pages 285–289, Porto, Portugal, May 2000.

[Mau00] B. Maurey. Cours d'analyse fonctionnelle et théorie spectrale, 2000. `http://www.math.jussieu.fr/~maurey/ths.html`.

[Mel91] R.A. Melter. A survey of digital metrics. *Contemporary Mathematics*, 119:95–106, 1991.

[Mey96] F. Meyer. A morphological interpolation method for mosaic images. In P. Maragos, R. Schafer, et M. Butt, editors, *Math. morphology and its app. to image and signal proc.*, pages 337–344, Boston, 1996. Kluwer Academic Publishers.

[Min96] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen.* Teubner, Leipzig, 1896.

[Mon68] U. Montanari. A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance. *Journal of ACM*, 15:600–624, 1968.

[Mon87] A. Montanvert. *Contribution au traitement de formes discrètes : squelettes et codage par graphe de la ligne médiane.* Thèse de Doctorat, USTMG and INPG, Grenoble, 1987.

[Mon93] A. Montanvert et Y. Usson. Discrete distances applied to 2D granulometry and 3D reconstruction. In *8^{th} Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 1153–1160, 1993.

[Mor70] J.J. Moreau. Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. *J. Math. Pures et Appl.*, 49:109–154, 1970.

[Muk99] J. Mukherjee, M. Aswatha Kumar, B.N. Chatterji, et P.P. Das. Discrete shading of three-dimensional objects from medial axis transform. *Pattern Recognition Letters*, 20:1533–1544, 1999.

[Muk00] J. Mukherjee, P.P. Das, M. Aswatha Kumar, et B.N. Chatterji. On approximating Euclidean metrics by digital distances in 2D and 3D. *Pattern Recognition Letters*, 21:573–582, 2000.

[Mul71] P. McMullen et G.C. Shephard. *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, volume 3 de *London Math. Soc. Lecture Note Series.* Cambridge University Press, 1971.

[Mul92] J.C. Mullikin. The vector distance transform in two and three dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54(6):526–535, 1992.

[Nac94] P.F.M. Nacken. *Image analysis methods based on hierarchies of graphs and multi-scale mathematical morphology.* PhD thesis, Amsterdam, 1994.

[Nil97] F. Nilsson et P.E. Danielsson. Finding the minimal set of maximum disks for binary objects. *Graphical Models and Image Processing*, 59(1):55–60, 1997.

[Oka83] N. Okabe, J. Toriwaki, et T. Fukumura. Paths and distance functions on three-dimensional digitized pictures. *Pattern Recognition Letters*, 1:205–212, 1983.

[Old00] C.D. Olds, A. Lax, et G. Davidoff. *The geometry of numbers*, volume 41 de *The Anneli Lax New Math. Library.* The Math. Assoc. of America, 2000.

[Pag92] D.W. Paglieroni. Distance transforms: properties and machine vision applications. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54(1):56–74, 1992.

[Pap95] O. Papini et J. Wolfmann. *Algèbre discrète et codes correcteurs*, volume 20 de *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 1995.

[Pfa67] J.L. Pfaltz et A. Rosenfeld. Computer representation of planar regions by their skeletons. *Comm. of ACM*, 10:119–125, feb 1967.

[Pre85] F.P. Preparata et M.I. Shamos. *Computational Geometry – An Introduction.* Texts and monographs in computer science. Springer Verlag, 1985.

[Rag92] I. Ragnemalm. Neigborhoods for distance transformations using ordered propagation. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 56(3):399–409, 1992.

[Rag93a] I. Ragnemalm. *The Euclidean Distance Transform*. PhD dissertation, Dep. Electrical Eng., Linköping University, Sweden, 1993.

[Rag93b] I. Ragnemalm. The Euclidean distance transform in arbitrary dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 14(11):883–888, 1993.

[Rem01] E. Remy. *Normes de chanfrein et axe médian dans le volume discret*. Thèse de Doctorat, Univ. de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Dec 2001.

[Rho92] F. Rhodes. Discrete euclidean metrics. *Pattern Recognition Letters*, 13:623–628, 1992.

[Ron89] C. Ronse. A bibliography on digital and computational convexity (1961–1988). *IEEE Trans. on PAMI*, 11(2):181–190, 1989.

[Ros66] A. Rosenfeld et J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of ACM*, 13(4):471–494, 1966.

[Ros68] A. Rosenfeld et J.L. Pfaltz. Distance functions on digital pictures. *Pattern Recognition*, 1:33–61, 1968.

[Ros75] A. Rosenfeld. A converse to the jordan curve theorem for digital curves. *Information and Control*, 29:292–293, 1975.

[Rut66] D. Rutovitz. Pattern recognition. *Journal of Royal Statis.*, 129:504–530, 1966.

[Sai94] T. Saito et J.I. Toriwaki. New algorithms for Euclidean distance transformation of an n-dimensional digitized picture with applications. *Pattern Recognition*, 27(11):1551–1565, 1994.

[San00] G. Sanniti di Baja et S. Svensson. Detecting centres of maximal geodesic discs on the distance transform of surfaces in 3D images. In *9th Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1953 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 443–452, Uppsala, Sweden, Dec 2000.

[She88] T. Shermer et G. Toussaint. Characterizations of convex and star-shaped polygons. In *Snapshots of Computational and Discrete Geometry*, Tech. Report SOCS-88.11, School of Computer Science, McGill University, June 1988.

[Shi92] F.Y. Shih et O.R. Mitchel. A mathematical morphology approach to Euclidean distance transformation. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1(2):197–204, 1992.

[Sra00] M. Sramek et A. Kaufman. Fast ray-tracing of rectilinear volume data using distance transform. *IEEE Trans. on Visu. and Comp. Graphics*, 6(3):236–252, Jul-Sep 2000.

[Sve01] S. Svensson. *Representing and Analysing 3D Digital Shape Using Distance Information*. PhD thesis, Swedish Univ. of Agricultural Sciences, Uppsala, Sweden, 2001.

[Syl84] J. Sylvester. Mathematicals questions with their solutions. *Educational Times*, 41:21, 1884.

[Thi91a] E. Thiel. *Amélioration des distances du chanfrein ; construction de la ligne médiane et décomposition de formes*. DEA en Mathématiques Appliquées, UJF, Grenoble 1, 1991.

[Thi91b] E. Thiel et A. Montanvert. Approximation discrète de la distance euclidienne pour l'analyse d'images : étude et amélioration des distances du chanfrein. In *8ème RFIA, Rec. des Formes et I.A*, volume 2, pages 829–839, Lyon, Nov 1991.

[Thi91c] E. Thiel et A. Montanvert. Approximations discrètes de la distance euclidienne. In *1st DGCI, Discrete Geometry for Computer Image*, Strasbourg, Sept 1991.

[Thi92a] E. Thiel. Distances discrètes. In *2nd DGCI, Discrete Geometry for Computer Image*, pages 69–78, Grenoble, Sept 1992.

[Thi92b] E. Thiel et A. Montanvert. Chamfer masks : discrete distance functions, geometrical properties and optimization. In *11th ICPR*, volume 3, pages 244–247, The Hague, The Netherlands, Sept 1992.

[Thi92c] E. Thiel et A. Montanvert. Etude et amélioration des distances du chanfrein pour l'analyse d'images. *Technique et Science Informatiques*, 11(4):9–41, 1992.

[Thi92d] E. Thiel et A. Montanvert. Les distances du chanfrein en géométrie discrète. In *Distancia'92, conf. int. sur l'analyse en distance*, pages 295–298, Rennes, Juin 1992.

[Thi92e] E. Thiel et A. Montanvert. Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance. In C. Arcelli et al., editors, *Visual Form Analysis and Recognition*, pages 537–546. Plenum, New York, 1992.

[Thi93a] D. Attali et E. Thiel. Du squelette discret ou continu. In *3rd DGCI, Discrete Geometry for Computer Image*, pages 236–244, Strasbourg, Sept 1993.

[Thi93b] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. A multiresolution shape description algorithm. In *5th int. conf. CAIP*, volume 719 de *Lectures Notes in Computer Science*, pages 208–215, Budapest, Hungary, Sept 1993.

[Thi93c] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. Shape description via weighted skeleton partition. In *7th ICIAP*, pages 87–94, Bari, Italy, Sept 1993.

[Thi94a] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. (3,4)-weighted skeleton decomposition for pattern representation and description. *Pattern Recognition*, 27:1039–1049, 1994.

[Thi94b] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. Computing and comparing distance-driven skeletons. In C. Arcelli et al., editors, *Aspects of Visual Form Processing*, pages 465–486. World Scientific, Singapore, 1994.

[Thi94c] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. The path based distance skeleton: a flexible tool to analyse silhouette shape. In *12th ICPR*, volume 2, pages 570–572, Jerusalem, Oct 1994.

[Thi94d] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Sept 1994. `http://www.lim.univ-mrs.fr/~thiel/these`.

[Thi94e] E. Thiel. Unification de la squelettisation menée en distance. In *9ème RFIA, Rec. des Formes et I.A*, volume 1, pages 349–358, Paris, Janv 1994.

[Thi95a] D. Attali, G. Sanniti di Baja, et E. Thiel. Pruning discrete and semicontinuous skeletons. In *8th ICIAP*, volume 974 de *Lectures Notes in Computer Science*, pages 488–493, Sanremo, Italy, Sept 1995.

[Thi95b] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. Computing and manipulating skeletons of planar patterns for shape representation and description. In *REC PAD'95*, pages 0.1.1–0.1.10, Aveiro, Portugal, Mar 1995.

[Thi96] G. Sanniti di Baja et E. Thiel. A skeletonization algorithm running on path-based distance maps. *Image and Vision Computing*, 14(1):47–57, Feb 1996.

[Thi97] D. Attali, G. Sanniti di Baja, et E. Thiel. Skeleton simplification through non significant branch removal. *Image Processing and Communications*, 3(3-4):63–72, 1997.

[Thi99] E. Remy et E. Thiel. Triangulations des boules de chanfrein. In *12ème journées de l'AFIG*, pages 126–135, Reims, Nov 1999.

[Thi00a] E. Remy et E. Thiel. Computing 3D medial axis for chamfer distances. In *9th DGCI, Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1953 de *Lectures Notes in Computer Science*, pages 418–430, Uppsala, Sweden, Dec 2000.

[Thi00b] E. Remy et E. Thiel. Optimizing 3D chamfer masks with norm constraints. In *7th IWCIA, Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis*, pages 39–56, Caen, July 2000.

[Thi00c] E. Remy et E. Thiel. Structures dans les sphères de chanfrein. In *12ème RFIA, Rec. des Formes et I.A*, volume 1, pages 483–492, Paris, Fev 2000.

[Thi02] E. Remy et E. Thiel. Medial axis for chamfer distances: computing look-up tables and neighbourhoods in 2D or 3D. *Pattern Recognition Letters*, 23(6):649–661, April 2002.

[Tho83] T.M. Thomson. *From error-correcting codes through sphere packings to simple groups*, volume 21 de *The Carus Math. Monographs*. The Math. Assoc. of America, 1983.

[Tie28] H. Tietze. Über konvexheit im kleinen und im grossen und über gewisse den punkten einer menge zugeordnete dimensionzahlen. *Math. Zeitschrift*, 28:697–707, 1928.

[Toi99] P.J. Toivanen, A.M. Vepsäläinen, et J.P.S. Parkkinen. Image compression using the distance transform on curved space (DTOCS) and Delaunay triangulation. *Pattern Recognition Letters*, 20:1015–1026, 1999.

[Tor81] J.I. Toriwaki, S. Yokoi, et T. Fukumura. On generalised distance transformation of digital pictures. *IEEE Trans. on PAMI*, 3(4):424–443, 1981.

[Vel93] M.L.J. van de Vel. *Theory of Convex Structures*. North-Holland Mathematical Library. North-Holland, 1993.

[Ver91a] J.H. Verwer. *Distance transforms: metrics, algorithms and applications*. PhD thesis, Technische Universiteit, Delft, 1991.

[Ver91b] J.H. Verwer. Local distance for distance transformations in two and three dimensions. *Pattern Recognition Letters*, 12:671–682, 1991.

[Vin91] L. Vincent. Exact Euclidean distance function by chain propagations. In *Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 520–525, Hawaï, June 1991.

[Vit00] J. Vittone et J.M. Chassery. Recognition of digital naive planes and polyhedrization. In *9th Discrete Geometry for Computer Image*, volume 1953 de *LNCS, Springer-Verlag*, pages 296–307, Uppsala, Sweden, Dec 2000.

[Vos88] A.M. Vossepoel. A note on "Distance transformations in digital images". *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 43:88–97, 1988.

[Wu86] A.Y. Wu, S.K. Bhaskar, et A. Rosenfeld. Computation of geometric properties from the Medial Axis Transform in $O(n \log n)$ time. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 34:76–92, 1986.

[Yam84a] H. Yamada. Complete euclidean distance transformation by parallel operation. In *7th ICPR*, pages 69–71, Montreal, 1984.

[Yam84b] M. Yamashita et N. Honda. Distance functions defined by variable neighborhood sequences. *Pattern Recognition*, 17(5):509–513, 1984.

[Ye88] Qin-Zhong Ye. The signed Euclidean distance transform and its applications. In *9th ICPR*, pages 495–499, Rome, 1988.

[Yok75] S. Yokoi, J. Toriwaki, et T. Fukumura. An analysis of topological properties of digitized binary pictures using local features. *Computer Graphics and Image Processing*, 4:63–73, 1975.

[Zie95] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1995.