TD n^{o} 8

Premier ordre – Modèles, formes normales et unification

MODÈLES

Exercice 1 Considérez la formule φ suivante :

$$\exists x \forall y \neg (f(y) = x) \wedge \forall x g(f(x)) = x\,.$$

Argumentez que si $\mathscr{M}$ est un modèle de φ, alors $D_{\mathscr{M}}$ est un ensemble infini.

Exercice 2 Considérez la structure produite par `Mace4` :

```
============================== MODEL =================================

interpretation( 4, [number=1, seconds=0], [

        relation(<(_,_), [
                          0, 1, 1, 1,
                          0, 0, 1, 1,
                          0, 0, 0, 0,
                          0, 0, 1, 0 ]),

        relation(S(_,_), [
                          0, 1, 0, 0,
                          0, 0, 0, 1,
                          0, 0, 0, 0,
                          0, 0, 1, 0 ])
]).

============================== end of model ==========================
```

1. Représentez cette structure sous la forme de graphe étiqueté.
2. Trouvez un ensemble Γ de formules (de la logique du premier ordre) tel que si $\mathscr{M} \models \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ et $D_{\mathscr{M}} = \{0,1,2,3\}$, alors $\mathscr{M}$ est la structure décrite dans le fichier output de `Mace4`.

FORMES NORMALES

Exercice 3 *(Forme prénexe).* Donner une forme prénexe des formules suivantes, en précisant les étapes de calcul :

1. $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow \exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))$

Exercice 4 *(Skolémisation).* Mettre en forme prénexe puis skolémiser les formules :

1. $\neg(\neg\varphi(x) \vee \forall x \psi(x)) \wedge (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \tau(x))$
2. $(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x)))$

Exercice 5 *(Formes prenexes et clausales).*

1. Donnez une forme prénexe et ensuite une forme clausale de la formule suivante, en précisant les étapes de calcul :

$$(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \wedge Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \wedge \exists x Q(y,x))).$$

2. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de la formule :

$$\forall x \neg R(x,x) \ \wedge \ \exists x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \exists z R(z,x)) \ \wedge \ \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x))).$$

UNIFICATION

Exercice 6 Soit $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{ (f,1), (g,2), (c,0) \}$. Calculez le composé des couples de substitutions suivantes :

1. $[g(f(y),c)/x, f(g(x,y))/y]$ et $[g(f(y),c)/y, f(g(x,y))/x]$,
2. $[g(f(y),c)/x, f(g(x,w))/y]$ et $[g(f(y),c)/z, f(g(x,y))/w]$.

Exercice 7 Montrez que l'application d'une substitution à un terme obéit les lois suivantes :

$$t[] = t\,, \qquad\qquad (t\sigma)\rho = t(\rho \circ \sigma)\,.$$

(Rappelez d'abord la définition de l'application et celle de la composition, puis développez votre preuve par induction sur la structure d'un terme). Argumentez que, par conséquent, les lois suivantes sont satisfaites :

$$\rho \circ [] = \rho = [] \circ \rho\,, \qquad\qquad (\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)\,.$$

Exercice 8 Proposez deux unificateurs σ et ρ du problème

$$\pi := (f(g(x),y)\,, f(g(y),h(z)))\,.$$

Le premier, σ, sera un MGU de π ; le deuxième, ρ, ne sera pas un MGU de π.

Exercice 9 Appliquez l'algorithme d'unification présenté en cours pour résoudre les problèmes d'unification suivants :

1. $(x + s(y) * s(z), 7 + s(5) * s(s(x)))$;
2. $(x + f(y,5), g(x) + f(g(x),5))$;
3. $(f(z, f(y,c)), f(g(w),x))$;
4. $(f(x),y)\ ,\ (g(y),z)\ ,\ (y, f(w))$;
5. $(g(x), g(f(y)))\ ,\ (z, h(y,x))\ ,\ (y,z)$;
6. $(f(x), f(g(y)))\ ,\ (x, h(y))$.

Pour chaque instance du problème :

— on décrira d'abord la signature fonctionnelle : lesquels sont les symboles de fonctions et avec quelle arité ils ont utilisés ;

— on éclaircira, étape par étape, le déroulement de l'algorithme.

Exercice 10 Argumentez que, si $x \notin Var(t)$, alors la substitution $[t/x]$ est un MGU du problème (x,t). Que peut on dire si $x \in Var(t)$?