TD n° 7

Premier ordre – Sémantique et modélisation

SÉMANTIQUE

Exercice 1 On donne $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{f, a\}$, $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{p\}$ où f est unaire, a constant et p binaire et les formules :

$$\varphi_1 = \ p(a, f(f(a)))$$
$$\varphi_2 = \ \forall x\, (p(x,x) \Rightarrow \exists y\, p(x,y))$$
$$\varphi_3 = \ \forall x\, (\, \exists y (p(x,y) \wedge p(y,a)) \Rightarrow \neg p(x,a)\,)$$

1. En supposant que le domaine d'interprétation D est l'ensemble des êtres humains, que a est interprétée par *Adèle Dupont*, $f(x)$ est *le père de x*, que $p(x,y)$ signifie *x aime y*, interprétez (en langue française) les trois formules.
2. On considère maintenant la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M} = \langle D, p^{\mathscr{M}}, a^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}} \rangle$, où :
   — $D = \{\text{Alma}, \text{Max}, \text{Dan}\}$
   — $p^{\mathscr{M}} = \{(Alma, Alma), (Alma, Dan), (Max, Alma), (Max, Dan)\}$
   — $a^{\mathscr{M}} = \text{Alma}$
   — $f^{\mathscr{M}}$: $\text{Alma} \mapsto \text{Max}, \text{Max} \mapsto \text{Dan}, \text{Dan} \mapsto \text{Dan}$,
   Les formules φ_1, φ_2, φ_3 sont-elles vraies dans cette interprétation ?

Exercice 2 Considérons le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\, (P,1)\,\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \varnothing$.

1. Combien y a-t-il de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $D_{\mathscr{M}} = \{\, 1, \ldots, n\,\}$?
2. Même question en considérant maintenant le langage $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}'_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}'_{\mathtt{f}} = \{\, (c,0)\,\}$.
3. Considérez la formule $\exists x P(x)$. Combien de modèles cette formule possède-t-elle tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\, 1, \ldots, n\,\}$?
4. Considérez la formule atomique $P(c)$. Combien de modèles cette formule possède-t-elle tels que $D_{\mathscr{M}} = \{\, 1, \ldots, n\,\}$?

Exercice 3 Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire, et un symbole de fonction f unaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \{\, a,b,c,d\,\}, \quad R^{\mathscr{M}} = \{\, (a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\,\},$$
$$f^{\mathscr{M}}(a) = c,\ f^{\mathscr{M}}(c) = a,\ f^{\mathscr{M}}(b) = d,\ f^{\mathscr{M}}(d) = b.$$

1. Représentez cette structure sous la forme d'un graphe étiqueté.
2. En regardant le (dessin du) graphe, évaluez les formules suivantes (utilisez votre intuition) :
   $$\varphi_1 := \ \forall x \exists y (\, R(x,y) \wedge R(f(y),x)\,)$$
   $$\varphi_2 := \ \exists x \forall y (\, R(x,y) \vee R(f(y),x)\,)$$
   $$\varphi_3 := \ \forall x \exists y (\, R(x,y) \Rightarrow \exists z R(f(z),x)\,)$$
3. Évaluez ces formules dans $\mathscr{M}$, cette fois-ci en utilisant la définition formelle de la fonction d'évaluation (appliquez toutes les étapes !).

MODÉLISATION

Exercice 4 Soit $\mathscr{S}$ le langage $(\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ avec $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\, (S,1), (\sqsubseteq, 2)\,\}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une minorant de y et z ;
3. x est la borne inférieure (le plus grand minorant) de y et z ;
4. x est la borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

(Vous pouvez écrire $\sqsubseteq(x,y)$ en notation infixe $x \sqsubseteq y$).

Proposez une $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ où $\sqsubseteq^{\mathscr{M}}$ est une relation d'ordre partiel et $S^{\mathscr{M}}$ est fermé par le bas mais n'a pas de borne inférieure.

Exercice 5 Soit $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ le langage tel que $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2),(s,2),(t,2)\}\}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat s contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.

Exercice 6 Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve dans le PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve dans le PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est eloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 7 Soit le langage $\mathscr{S} = \{\varnothing, \{(S,1),(\sqsubseteq,2)\}\}$ Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une minorant de y et z ;
3. x est le plus grande minorant (la borne inférieure) de y et z ;
4. x est la borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

(Vous pouvez écrire $\sqsubseteq(x,y)$ en notation infixe $x \sqsubseteq y$).

Exercice 8 Soit le langage $\mathscr{S} = \{\{(f,1),(g,1)\},\{(p,1),(q,1),(r,2),(s,2),(t,2)\}\}$. Ecrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat s contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.