TD n° 6

Premier ordre — Syntaxe, sémantique, modélisation

PREMIER ORDRE, SYNTAXE

Exercice 1 Pour chacune des signatures $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ suivantes, donnez plusieurs éléments de l'ensemble $\mathtt{T}_{\mathscr{S}_{\mathtt{f}}}[X]$ des termes définis sur $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$.

1. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(s,1)\}$;
2. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,2)\}$;
3. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,2),(s,1),(c,0)\}$.

Exercice 2 On considère le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(c,0),(f,1),(g,2)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(r,2),(p,1),(q,3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez-les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 3 On considère l'ensemble de variables $X = \{x,y,z\}$ et les formules suivantes.

$$\varphi_1 = (\forall x \exists z f(x,z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x,y,z))$$
$$\varphi_2 = (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x))$$
$$\varphi_3 = \forall x ((\exists x g(f(x),a) \vee h(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. inférez le langage (i.e. le couple des signatures $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}}$) sur lequel la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.

Exercice 4 Pour chacune des formules suivantes, déterminer les occurrences liées et libres de chaque variable, puis renommer les variables pour obtenir une formule équivalente dont aucune occurrence de variable n'est libre et liée à la fois.

$$\varphi_1 \equiv \forall x \exists z r(x,z) \Rightarrow \exists x \forall y r(x,y,z)$$
$$\varphi_2 \equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x))$$
$$\varphi_3 \equiv \forall x ((\exists x p(f(x),a) \vee q(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$$

SÉMANTIQUE

Exercice 5 On donne $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{f,a\}$, $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{p\}$ où f est unaire, a constant et p binaire et les formules :

$$\varphi_1 = p(a, f(f(a)))$$
$$\varphi_2 = \forall x (p(x,x) \Rightarrow \exists y p(x,y))$$
$$\varphi_3 = \forall x (\exists y (p(x,y) \wedge p(y,a)) \Rightarrow \neg p(x,a))$$

1. En supposant que le domaine d'interprétation D est l'ensemble des êtres humains, que a est interprétée par *Adèle Dupont*, $f(x)$ est *le père de x*, que $p(x,y)$ signifie *x aime y*, interprétez (en langue française) les trois formules.
2. On considère maintenant la $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M} = \langle D, p^{\mathscr{M}}, a^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}} \rangle$, où :
   — $D = \{\text{Alma}, \text{Max}, \text{Dan}\}$
   — $p^{\mathscr{M}} = \{(Alma,Alma),(Alma,Dan),(Max,Alma),(Max,Dan)\}$
   — $a^{\mathscr{M}} = \text{Alma}$

— $f^{\mathscr{M}}$: $\text{Alma} \mapsto \text{Max}, \text{Max} \mapsto \text{Dan}, \text{Dan} \mapsto \text{Dan}$,

Les formules φ_1, φ_2, φ_3 sont-elles vraies dans cette interprétation ?

Exercice 6 Considérons le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{ (P, 1) \}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \varnothing$.

1. Combien y a-t-il de $\mathscr{S}$-structures $\mathscr{M}$ telles que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \dots, n \}$?
2. Même question en considérant maintenant le langage $\mathscr{S}' = (\mathscr{S}_{\mathtt{r}}, \mathscr{S}'_{\mathtt{f}})$ où $\mathscr{S}'_{\mathtt{f}} = \{ (c, 0) \}$.
3. Considérez la formule $\exists x P(x)$. Combien de modèles cette formule possède-t-elle tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \dots, n \}$?
4. Considérez la formule atomique $P(c)$. Combien de modèles cette formule possède-t-elle tels que $D_{\mathscr{M}} = \{ 1, \dots, n \}$?

Exercice 7 Considérons le langage $\mathscr{S}$ avec un symbole de relation R binaire, et un symbole de fonction f unaire, et la $\mathscr{S}$-structure suivante :

$$D_{\mathscr{M}} = \{ a, b, c, d \}, \quad R^{\mathscr{M}} = \{ (a,b), (b,c), (c,d), (d,a) \},$$
$$f^{\mathscr{M}}(a) = c, \ f^{\mathscr{M}}(c) = a, \ f^{\mathscr{M}}(b) = d, \ f^{\mathscr{M}}(d) = b.$$

1. Représentez cette structure sous la forme d'un graphe étiqueté.
2. En regardant le (dessin du) graphe, évaluez les formules suivantes (utilisez votre intuition) :
   $\varphi_1 := \ \forall x \exists y (R(x,y) \wedge R(f(y), x))$
   $\varphi_2 := \ \exists x \forall y (R(x,y) \vee R(f(y), x))$
   $\varphi_3 := \ \forall x \exists y (R(x,y) \Rightarrow \exists z R(f(z), x))$
3. Évaluez ces formules dans $\mathscr{M}$, cette fois-ci en utilisant la définition formelle de la fonction d'évaluation (appliquez toutes les étapes !).

Modélisation

Exercice 8 Soit $\mathscr{S}$ le langage $(\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ avec $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{ (S, 1), (\sqsubseteq, 2) \}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une minorant de y et z ;
3. x est la borne inférieure (le plus grand minorant) de y et z ;
4. x est la borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

(Vous pouvez écrire $\sqsubseteq (x, y)$ en notation infixe $x \sqsubseteq y$).

Proposez une $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ où $\sqsubseteq^{\mathscr{M}}$ est une relation d'ordre partiel et $S^{\mathscr{M}}$ est fermé par le bas mais n'a pas de borne inférieure.

Exercice 9 Soit $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ le langage tel que $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f, 1), (g, 1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p, 1), (q, 1), (r, 2), (s, 2), (t, 2)\}\}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat s contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p ;
4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.