

TD n° 5

Coupure, modélisation, syntaxe du premier-ordre

METHODE DE LA COUPURE

Exercice 1 Utiliser la méthode de la coupure pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$
8. $\models (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q))$
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$
10. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

MODÉLISATION

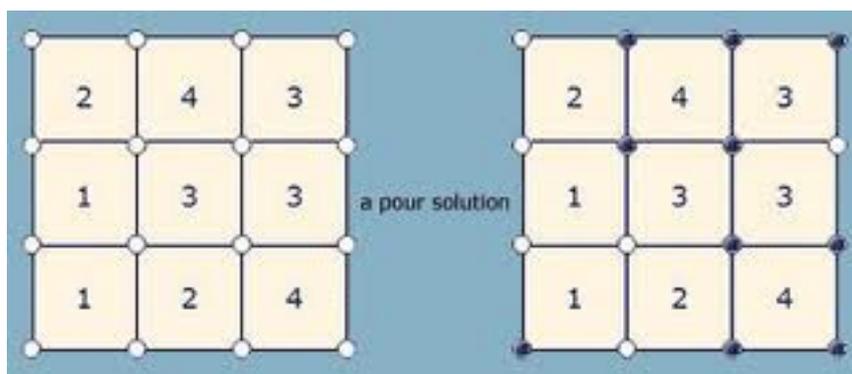
Exercice 2 Le lieutenant Colombo enquête sur le crime commis la nuit du 11 octobre. Il dispose des informations suivantes :

1. Jacques ou Martin est coupable.
2. Si Martin est coupable, alors le crime a eu lieu avant minuit.
3. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Jacques est coupable.
4. Le crime a eu lieu avant minuit.

Que peut-il en déduire sur l'identité du (ou des) coupable(s) ? Même question s'il dispose de l'information supplémentaire :

5. Si Jacques est coupable, alors le crime a eu lieu après minuit.

Exercice 3 (*Le squarO*). Le jeu se déroule dans une grille de taille $n \times n$, avec un rond à chaque noeud de la grille. Le but est de noircir certains ronds de la grille en respectant des contraintes données, pour chaque case de la grille, par un chiffre entre 0 et 4 correspondant au nombre de coins de cette case à noircir. Voici un exemple de grille, avec une solution possible :



Donnez une formule dont les modèles sont les solutions de la grille ci-dessus.

PREMIER ORDRE, SYNTAXE

Exercice 4 Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_r)$ où

$$\mathcal{S}_f = \{(c, 0), (f, 1), (g, 2)\}, \quad \mathcal{S}_r = \{(P, 1), (Q, 2), (R, 3)\}$$

et les expressions suivantes :

1. $g(f(0), g(x, f(f(y))))$,
2. $g(f(0), f(0, f(0)))$,
3. $Q(f(x), P(y))$,
4. $R(f(0), f(f(0)), y)$,
5. $P(f(x)) \wedge \exists y(Q(y, x) \Rightarrow R(y, x, f(x)))$,
6. $P(f(x)) \vee R(g(x, y), f(z), y)$,
7. $\forall x \exists y g(x, f(y))$,
8. $\exists y \forall x Q(g(x), f(y, g(0)))$,
9. $\forall x \exists y \forall z Q(x, f(y), g(0, z)) \vee P(x)$.

Classez chaque expression dans une ou plusieurs des catégories suivantes : (a) terme appartenant à $T_{\mathcal{S}_f}[X]$, (b) formule atomique parmi les formules de $\mathcal{F}_{po}(\mathcal{S})$, (c) formule appartenant à $\mathcal{F}_{po}(\mathcal{S})$, (d) aucun des précédents. Dans le dernier cas, expliquez pourquoi l'expression ne peut pas se classer.

Exercice 5 Pour chacune des signatures \mathcal{S}_f suivantes, donnez plusieurs éléments de l'ensemble $T_{\mathcal{S}_f}[X]$ des termes définis sur \mathcal{S}_f .

1. $\mathcal{S}_f = \{(s, 1)\}$;
2. $\mathcal{S}_f = \{(f, 2)\}$;
3. $\mathcal{S}_f = \{(f, 2), (s, 1), (c, 0)\}$.

Exercice 6 On considère le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_r)$ où $\mathcal{S}_f = \{(c, 0), (f, 1), (g, 2)\}$ et $\mathcal{S}_r = \{(r, 2), (p, 1), (q, 3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez-les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 7 On considère l'ensemble de variables $X = \{x, y, z\}$ et les formules suivantes.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\forall x \exists z f(x, z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x, y, z)) \\ \varphi_2 &= (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x)) \\ \varphi_3 &= \forall x ((\exists x g(f(x), a) \vee h(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y))) \end{aligned}$$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. inférez le langage (i.e. le couple des signatures \mathcal{S}_f et \mathcal{S}_r) sur laquelle la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.

Exercice 8 Pour chacune des formules suivantes, déterminer les occurrences liées et libres de chaque variable, puis renommer les variables pour obtenir une formule équivalente dont aucune occurrence de variable n'est libre et liée à la fois.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \forall x \exists z r(x, z) \Rightarrow \exists x \forall y r(x, y, z) \\ \varphi_2 &\equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\ \varphi_3 &\equiv \forall x ((\exists x p(f(x), a) \vee q(x, x)) \wedge (\forall y \exists x q(x, y) \vee \exists z p(z, y))) \end{aligned}$$