TD n° 4

Calcul Propositionnel : Algorithmes, Français, Modélisation

Exercice 1

Calculer une forme clausale (conjonctive) de chacune des formules suivantes :

1. $\psi_1 = (p \wedge \neg((q \vee r) \Rightarrow p)) \vee s$;
2. $\psi_2 = (p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2)$;
3. $\psi_3 = \neg((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s))$.

Exercice 2 *(Algorithme de Quine).* Transformez la formule suivante :

$$\varphi = (p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \Leftrightarrow (r \wedge (p \vee s)))$$

en forme normale conjonctive et appliquez ensuite l'algorithme de Quine pour trouver tous les modèles de φ.

Exercice 3 *(Algorithme DPLL).* Transformez la formule

$$\varphi = \neg[(p \Rightarrow s) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (s \wedge q \wedge r \wedge \neg p)))]$$

en FNC et appliquez algorithme de DPLL pour trouver un modèle. Répétez ensuite l'exercice avec la formule de l'exercice 2.

Exercice 4 Montrez que, pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble de clauses $\mathscr{C}_n$ dont les symboles propositionnels sont $\{ p_1, \ldots, p_n \}$ tel que l'arbre construit par l'algorithme de Quine est un arbre complet de profondeur n (donc, avec 2^n noeuds) où, par contre, l'arbre exploré par l'algorithme DPLL est une branche de longueur n (donc, seulement $n+1$ noeuds sont explorés par l'algorithme).

Exercice 5 Utiliser la méthode de la coupure pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$.
8. $\models (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q))$.
9. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.
10. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Français et logique formelle

Exercice 6 Alain, Baru et Carole sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la façon suivante :

Alain : « Baru est coupable et Carole est innocente. »

Baru : « Si Alain est coupable alors Carole aussi. »

Carole : « Je suis innocente mais au moins un des deux autres est coupable. »

Exprimer le témoignage de chacun sous forme propositionnelle. Dresser la table de vérité de ces formules. Les témoignages sont-ils compatibles ? Le témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre suspect ? Lequel ? En supposant que tous sont innocents, qui a fait un faux témoignage ?

Exercice 7 L'association des Informaticiens de AMU est dirigée par trois directions : scientifique, financière, générale. Le règlement intérieur spécifie que :

— Les membres de la direction générale sont choisis parmi ceux de la direction financière.

— Nul ne peut être membre de la direction générale et de la direction scientifique s'il n'est pas membre de la direction financière.

— Aucun membre de la direction scientifique ne peut être membre de la direction financière.

1. Donner une spécification logique de ce règlement.
2. Proposer un règlement plus simple équivalent.

Modélisation

Exercice 8 On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (a et b) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

1. Il y a au moins un bateau sur la ligne b.
2. Il y a au moins un bateau sur la ligne a.
3. Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
4. Il n'y a pas de bateau en $(b,1)$.
5. S'il y a un bateau sur la ligne a, alors il n'y en a pas en $(b,3)$.

En notant x_i l'information « il y a un bateau en position (x,i) » (pour $x \in \{a,b\}$ et $i \in \{1,2,3\}$), modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum l'ensemble des formules obtenues puis dessinez les modèles de cet ensemble.