# TD n$^o$ 2

## Calcul Propositionnel – Conséquences logiques

*Dans toute cette planche, $\Sigma$ et $\Gamma$ désignent deux ensembles* quelconques *(finis ou non, éventuellement vides) de formules. De même, $\varphi$ et $\psi$ désignent deux formules propositionnelles quelconques.*

**Rappels, notations.** Soient deux ensembles A et B.

— Pour prouver que $A \subseteq B$, on montre que "pour tout élément $a$, si $a \in A$ alors $a \in B$".

— Pour prouver que $A = B$ on montre que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$.

— On a $a \in A \cap B$ ssi $a \in A$ et $a \in B$.

— On a $a \in A \cup B$ ssi $a \in A$ ou $a \in B$.

On notera, dans la suite

$$\text{Taut} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \ \mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val} \,\}, \qquad \text{NonSat} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing \,\},$$
$$\text{Cons}(\Sigma) = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \Sigma \models \varphi \,\}.$$

Ainsi, Taut est l'ensemble des tautologies, NonSat est l'ensemble des formules non-satisfaisables, et Cons$(\Sigma)$ est l'ensemble des conséquences logiques de $\Sigma$.

**Exercice 1** On considère l'ensemble de formules propositionnelles

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r\}$$

1. Trouver un modèle de $\Gamma$. Combien y a-t-il de modèles ?
2. Les formules $q \Rightarrow p$, $p$, $r$ sont-elles des conséquences logiques de $\Gamma$ ?

**Exercice 2** On se donne $\Gamma$ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule $\varphi$ conséquence de $\Gamma$ et une formule $\psi$ qui n'est pas une conséquence de $\Gamma$.

1. On ajoute une tautologie $\tau$ à $\Gamma$. Est-ce que $\varphi$ et $\psi$ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$ ? Donnez une preuve formelle.
2. Même question si $\tau$ est une formule insatisfaisable.

**Exercice 3** Démontrer :

1. $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.
2. $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi$.
3. $\varphi \equiv \psi$ ssi $\text{Cons}(\varphi) = \text{Cons}(\psi)$.

**Exercice 4** Démontrer :

1. $\text{Taut} \subseteq \text{Cons}(\varphi)$.
2. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \text{Taut}$.
3. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \mathscr{F}_{\text{cp}}$.
4. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\Gamma)$.
5. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\varphi)$.

**Exercice 5** Un ensemble de formules $\Gamma$ est dit *complet* ssi

$$\Gamma \text{ est consistant et, pour tout } \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}}, \Gamma \models \varphi \text{ ou } \Gamma \models \neg\varphi$$

1. Montrez que $\Gamma$ est complet si et seulement si il a un et un seul modèle.
2. Donnez l'exemple d'un ensemble complet et d'un ensemble non complet.
3. Si $v$ est une une valuation, on appelle *théorie* de $v$, et on note $\textsc{Th}(v)$, l'ensemble des formules satisfaites par $v$. Autrement dit, $\textsc{Th}(v) = \{\varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid v(\varphi) = 1\}$. Montrez que, pour tout $v \in \mathsf{Val}$, $\textsc{Th}(v)$ est complet.
4. Montrez que $\text{Cons}(\textsc{Th}(v)) \subseteq \textsc{Th}(v)$.
5. Donnez l'exemple d'un ensemble complet qui n'est pas de la forme $\textsc{Th}(v)$.

**Exercice 6** Soit $\Gamma$ un ensemble complet tel que $\text{Cons}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Démontrez :

1. $\varphi \in \Gamma$ ssi $\neg\varphi \notin \Gamma$,
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\gamma \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$,
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\gamma \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.