TD n° 1

Calcul propositionnel — syntaxe et sémantique

Syntaxe

Exercice 1 Considérez les formules du calcul propositionnel suivantes :

$\varphi_1 := \ r \vee (p \neg ((\wedge q) \Rightarrow \neg r))$;

$\varphi_2 := \ p \wedge (r \wedge ((\neg q) \Rightarrow \neg p))$;

$\varphi_3 := \ ((q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \ \wedge \ ((\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q))$.

Pour chaque formule $\varphi_i \in \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

1. dessinez son arbre syntaxique ;
2. énumérez ses sous-formules ;
3. énumérez les symboles propositionnels ayant une occurrence dans φ_i.

Sémantique

Exercice 2 1. Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$?

2. Énumérez les modèles de la formule $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
3. Est-ce que cette formule est (in)satisfaisable, valide ?

Exercice 3 On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

1. Soit v une valuation. Déterminer, *si possible*, $v(\varphi)$ et $v(\psi)$ dans chacun des quatre cas suivants :
   (a) on sait que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$;
   (b) on sait que $v(p) = 0$;
   (c) on sait que $v(q) = 1$;
   (d) on ne sait rien sur $v(p)$ et $v(q)$.
2. Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Des tautologies ?
3. L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est-il consistant ? C'est-à-dire, existe t'il une valuation telle que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$?

Exercice 4 Une formule φ est dite *contingente* lorsqu'elle est satisfaisable mais n'est pas une tautologie. Dire si les formules suivantes sont insatisfaisables, contingentes, ou encore des tautologies :

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge (\neg r \vee s)$

Exercice 5 Soit φ une formule du calcul propositionnel.

1. Que peut-on dire de $\mathsf{mod}(\varphi)$ lorsque φ est contingente ?
2. Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Que pensez-vous des affirmations suivantes :
   (a) si φ est contingente, alors $\neg\varphi$ l'est également ;
   (b) si φ et ψ sont contingentes, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont contingentes ;

(c) si $\varphi \vee \psi$ est insatisfaisable alors φ et ψ sont insatisfaisables ;

(d) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ et ψ sont des tautologies ;

(e) si $\varphi \vee \psi$ est une tautologie alors φ est une tautologie, ou ψ est une tautologie.

Exercice 6 Montrez qu'une formule φ est une tautologie si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfaisable. On suppose donné un algorithme qui vérifie si une formule est une tautologie ; construire un autre algorithme pour vérifier si une formule est satisfaisable.

Exercice 7 Proposez une formule φ ayant la table de vérité suivante :

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 8 Dans cet exercice, on identifie l'ensemble $\{0,1\}$ au corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs $\wedge, \vee, \neg$;
2. Exprimer les connecteurs $\wedge, \vee, \neg$ à l'aide des opérations $+$ et $\times$;
3. Montrer qu'à toute formule propositionnelle φ dont les variables sont $q_1, \ldots q_n$, on peut associer un polynôme à n indéterminées P tel que $\varphi = P(a_1, ..., a_n)$, et tel que, pour toute valuation v, on a $v(\varphi) = P(v(q_1), \ldots, v(q_n))$.
4. En déduire une méthode pour déterminer si deux formules sont logiquement équivalentes, ou si une formule est une tautologie.

Exercice 9 Prouvez les équivalences logiques suivantes :

$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	(Commutativité)
$\varphi \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \wedge \psi_2$	$\varphi \vee (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \vee \psi_2$	(Associativité)
$\top \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \top \equiv \varphi$	$\perp \vee \varphi \equiv \varphi \vee \perp \equiv \varphi$	(Élements neutres)
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	(Idempotence)
$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$	(Absorption)
$\varphi \wedge \perp \equiv \perp \wedge \varphi \equiv \perp$	$\varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$	(Élément absorbant)
$\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$	$\varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2)$	(Distributivité)
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \neg\varphi \wedge \varphi \equiv \perp$	$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv \top$	(Complément)
$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$		(Involution)
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	(Lois de De Morgan)
$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$		(Implication matérielle)
$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$		(Contraposition)
$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3$		(Curryfication)