TD4

5 février 2004

On pourra se servir des données et programmes SAS disponibles sur les pages

`http ://www.cmi.univ-mts.fr/~pouet/`
`http ://www.cmi.univ-mts.fr/~lsantoca/statmv.html`

Exercice 1.
On note classiquement
- p_t le vecteur des prix risqués à l'instant t,
- r_t le taux d'intérêts à l'instant t,
- $a_{0,t}$ la quantité d'actif non risqué,
- α_t le vecteur des quantités d'actifs risqués,
- $w_t = \alpha_{0,t} + \alpha_t' p_t$ la richesse à l'instant t.

Rappelons la formule d'allocations des actifs pour le portefeuille optimal :

$$\begin{aligned} \alpha_t^* &= \frac{1}{A} V_t(Y_{t+1})^{-1} E_t(Y_{t+1}) \\ \alpha_{0,t}^* &= w_t - (\alpha_t^*)' p_t \,. \end{aligned}$$

où

$$Y_{t+1} = p_{t+1} - (1 + r_t) p_t \,.$$

Posons aussi

$$y_{t+1} = \operatorname{diag}(p_t)^{-1}(p_{t+1} - p_t) \,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= \operatorname{diag}(p_t)(y_{t+1} - r_t e) \\ E_t(Y_{t+1}) &= \operatorname{diag}(p_t)(E_t(y_{t+1}) - r_t e) \\ V_t(Y_{t+1}) &= \operatorname{diag}(p_t) V_t(y_{t+1}) \operatorname{diag}(p_t) \\ \alpha_t^* &= \frac{1}{A} \operatorname{diag}(p_t)^{-1} V_t(y_{t+1})^{-1} (E_t(y_{t+1}) - r_t e) \,. \end{aligned}$$

- On suppose maintenant et que le portefeuille w comporte seulement deux actifs risques, et que le processus Y_t (Excess Gain) satisfait

$$\begin{aligned} E_t(Y_{t+1}) &= \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ V_t(Y_{t+1}) &= \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Donner des formules explicites pour la quantité α_t^* (en fonction de $\mu_i, \omega_{i,j}$ et A).

– On suppose toujours que le portefeuille w comporte seulement deux actifs risqués, mais maintenant

$$\begin{aligned} E_t(y_{t+1}) &= \mu \\ V_t(y_{t+1}) &= \Omega\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Donner des formules explicites pour la quantité α_t^*.

Nous allons considérer des couples des actifs risqués, Total Elf Fina, L'Oréal, Aventis, etc, dont les données disponibles sur la page web

`http ://www.cmi.univ-mts.fr/~pouet/statmv.html` .

Nous allons aussi supposer que la condition (1) est satisfaite.
- A l'aide de SAS estimer μ et Ω.
- Calculer l'allocation optimale de 10000 euros en fonction du coefficient d'aversion au risque . diversifiés pour les taux d'intérêts suivants :
  - Euribor 1 semaine : $r_t = 2.884\%$,
  - Eurodollar Deposit 1 mois : $r_t = 1.29\%$,
- Répéter les étapes précédentes en supposant que la condition (2) est satisfaite.
- Écrire un programme SAS qui automatise tous les calculs.

Exercice 2.
La performance de Sharp est la quantité

$$P_t = E_t(Y_{t+1})' V_t(Y_{t+1})^{-1} E_t(Y_{t+1})\,.$$

Soit μ_t^* la valeur anticipé d'un portefeuille optimal, η_t^{2*} son risque anticipé. La relation

$$\eta_t^{2*} = \frac{1}{P_t}(\mu_t^* - w(1+r_t))^2$$

montre que – pour des valeurs anticipés égaux – le risque est inversement proportionnel à la performance de Sharp. Dans la suite, nous allons considérer un portefeuille w avec seulement deux actifs risqués.
- En supposant que la condition (1) est satisfaite pour le processus bidimensionnel des « Excess Gain », donner une formule explicite pour la performance de Sharp et pour la valeur anticipée.
- De même pour le processus des rendements, c.à.d. on suppose maintenant que la condition (2) est satisfaite.
- Écrire un programme SAS qui, en fonction de deux actifs, en estime μ et Ω (pour l'Excess Gain et les rendements) et automatise tous ces calculs.
- Nous voulons créer un portefeuille avec deux actifs risqués. Quelle couple d'actifs vous allez choisir ? Se servir du programme SAS pour faire une comparaison exhaustive de tous le couples d'actifs.