

# TD7 : test d'efficience du marché

26 février 2004

Nous allons considérer un portefeuille (le portefeuille du marché) composé d'actifs risqués  $i = 1, \dots, n$ , dont les prix au temps  $t$  sont  $p_{i,t}$ , et d'un actif non risqué au taux annuel  $r$ . Comme d'habitude  $Y_t$  dénotera le processus des « Excess Gains ». Rappelons ici les hypothèses du CAPM :

- Chaque investisseur est efficient (il applique la stratégie moyenne-variance).
- L'offre des titres est égale à la demande des titres.

Nous allons aussi faire les hypothèses suivantes :

- L'offre des titres est constante (et égal au vecteur  $b_0$ ).
- Le processus  $Y_t$  est hétéroscédastique :  $V_t(Y_{t+1}) = \Omega$ .

Soit maintenant  $Y_{m,t} = b_0' Y_t$  le processus des Excess Gain du marché. Sous ces hypothèses on démontre la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Dans la régression affine*

$$Y_{i,t+1} = c_i + \beta_i Y_{m,t+1} + u_{i,t+1}$$

- où  $E u_{t+1} = 0$  et  $Cov(Y_{m,t+1}, u_{i,t+1}) = 0$  – le terme constant  $c_i$  est égal à 0.

On peut utiliser cette proposition afin de tester l'hypothèse que le marché (ou indice du marché) est efficient. On procède comme il suit :

- On estime les coefficients  $c_i$  des régressions affines à partir d'un nombre  $T$  d'observations. Si  $\hat{c} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)'$  est le vecteur des estimateurs, alors il faut aussi calculer la matrice de variance-covariance des estimateurs  $\hat{V}\hat{c}$ .
- On utilise la statistique de Wald  $\xi_W = \hat{c}'(\hat{V}\hat{c})^{-1}\hat{c}$  afin de mesurer la distance du vecteur  $\hat{c}$  de 0 et tester l'hypothèse  $H_0 = \{c_i = 0 \mid i = 1, \dots, n\}$  : en sachant que cette statistique est asymptotiquement  $\chi^2(n-1)$ , on accepte l'hypothèse si  $T\xi_W < \chi_{95\%}^2(n-1)$  et on la rejette sinon ( $T$  est le nombre d'observations contribuant à l'estimation).

## Exercice 1.

Écrire une macro SAS %test prenant comme paramètres : a) un tableau contenant les historiques des deux actifs  $A, B$ , et un indice du marché  $I$ , b) un taux annuel  $r$ . Cette procédure opère le test de l'hypothèse  $H_0 = \{c_i = 0 \mid i = 1, \dots, n\}$ .

Pour les régressions on pourra utiliser la procédure SAS SYSLIN.

- Quel problème se pose si on veut calculer la statistique de Wald ?
- Quel autre type de test est possible faire à l'aide de la procédure **SYSLIN** ?

Pour les exercices suivants on pourra obtenir les données des pages web

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~lsantoca/stmv/statmv.html>

<http://www.bourse-de-paris.fr/servlet/historique.action?lang=fr>.

### Exercice 2.

On veut créer un indice du marché en utilisant les actifs **alstom** et **bnp**, selon la formule

$$I = \frac{1}{2}(p_{\text{alstom}} + p_{\text{bnp}}).$$

Peut on dire qu'il s'agit d'un indice dont le portefeuille correspondant est efficient (par rapport à un taux annuel de 2.8884%) ?

### Exercice 3.

On sait que l'offre de titres pour l'actif **alstom** est égal à 786802159, et que l'offre de titres pour **bnp** est égal à 903171615. Proposer une formule de calcul de l'indice  $I$  qui nous assure – les hypothèses du CAPM étant satisfaites – que l'indice du marché est efficient. Utiliser la macro SAS **%test** pour tester la validité des hypothèses du CAPM.

### Exercice 4.

Calculer l'allocation des actifs **alstom** et **bnp** optimale pour la stratégie moyenne-variance (TD4). Proposer une formule de calcul de l'indice  $I$  et tester la validité des hypothèses du CAPM avec cet indice.

### Exercice 5.

Écrire la macro **%test** de façon que le tableau en paramètre puisse contenir les prix d'un nombre arbitraire d'actifs  $A_1, \dots, A_n$ . Tester l'efficacité de l'indice CAC40 en utilisant ses 40 actifs, voir par exemple l'url <http://www.mesactions.com/listeIndices.php>.